

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АПЕРТУРЫ БУСТЕРНОГО СИНХРОТРОНА КОМПЛЕКСА NICA НА ОСНОВЕ ДАННЫХ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

М. М. Шандов^{а, 1}, С. А. Костромин^{а, б}

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^б Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Одной из ключевых характеристик любого ускорителя является его динамическая апертура (ДА). В процессе создания машины важной задачей является оценка влияния ошибок полей ее структурных элементов (нелинейности и ошибки интегральной величины магнитного поля, погрешности позиционирования и пр.) и системы коррекции ведущего магнитного поля на ДА. В рамках данной работы разработана методика моделирования динамической апертуры бустерного синхротрона комплекса NICA с помощью алгоритма симплектического трекинга РТС (Polymorphic tracking code) программного комплекса MAD-X. При моделировании учитывались результаты магнитных измерений структурных элементов (дипольных и квадрупольных магнитов), а также действие системы коррекции натуральной хроматичности и секступольных нелинейностей магнитных полей элементов.

Dynamic aperture (DA) is one of the key characteristics for any accelerator facilities. The estimation of the lattice elements errors (nonlinearities and integral field value errors, misalignment of the elements, etc.) and beam correction system influence on DA are the milestone stage during construction of the facility. Also, the value of the DA is ought to be sufficient (be in excess of the beam pipe dimensions). The paper studies methods of the DA calculation for the NICA booster synchrotron in MAD-X software among other factors including symplectic tracking algorithm PTC (Polymorphic tracking code). The results of the magnetic measurements of the lattice elements and influence of the chromaticity and sextupole errors of magnets correction system were taken into account.

PACS: 41.85.Lc; 29.20.D; 29.20.Dh; 29.20.db; 29.20.Lq; 41.85.–p; 07.05.Tr

ВВЕДЕНИЕ

NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility) — новый ускорительно-накопительный комплекс, сооружаемый в ОИЯИ для изучения свойств барионной материи высокой плотности [1]. Одним из элементов комплекса является новый сверхпроводящий бустерный синхротрон (бустер) [2]. Описание магнитооптической структуры и рабочие параметры установки можно найти в [1–4]. Система коррекции ведущего магнитного

¹E-mail: shandov@jinr.ru

поля, хроматичности и секступольных нелинейностей магнитных полей элементов оптической структуры включает 24 дипольных (12 вертикальных и 12 горизонтальных) и 8 мультипольных корректирующих магнитов, подробнее корректирующие магниты рассмотрены в [5]. В табл. 1 приводится часть основных параметров бустера из [4], необходимых для проведения моделирования и оценки результатов расчетов. Оптические функции суперпериода ускорителя показаны на рис. 1. Рабочая диаграмма с указанием положения рабочей точки и резонансов до 5-го порядка включительно представлена на рис. 2. Настоящая статья посвящена разработке методики моделирования и расчета ДА. Рассмотрение коррекции замкнутой орбиты и положения рабочей точки для частиц с импульсным разбросом является предметом отдельных исследований. Конструкцию и основные характеристики структурных магнитов можно найти в [6].

Таблица 1. Основные параметры бустера NICA

Параметр	Значение
Энергия ионов $^{197}_{31}\text{Au}$, МэВ/нуклон	3,2–578
Частоты бетатронных колебаний ν_x/ν_y	4,80/4,85
Натуральная хроматичность ξ_x/ξ_y	-5,10/-5,50
Акцептанс кольца, π мм·мрад:	
горизонтальный	305 ¹
вертикальный	150 ² 80 ¹ 58 ²
Эмиттанс пучка, π мм·мрад:	
при инжекции $\varepsilon_x/\varepsilon_y$	15–150 ³ /15
в конце ускорения $\varepsilon_x/\varepsilon_y$	0,2–3 ⁴ /0,2–1,5 ⁵
Количество ионов в сгустке	$3 \cdot 10^9$
Импульсный разброс $\Delta p/p$:	
при инжекции	$\pm 10^{-3}$
максимальный	$\pm 2,3 \cdot 10^{-3}$
в конце ускорения	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$
Период обращения, мкс:	
при инжекции	8,51
в конце ускорения	0,89

¹Использовано обычное определение акцептанса: $A_{x,y} = r_{x,y}^2/\beta_{x,y;\max}$, где $r_{x,y}$ – полуось сечения вакуумной камеры.

²Использовано следующее определение бетатронного акцептанса с учетом дисперсии и искажения замкнутой орбиты: $A_x = \left(r_x - D_{\max} \frac{\Delta p}{p_{\max}} - |\Delta x_{c.o,\max}| \right)^2 / \beta_{x;\max}$, $A_y = (r_y - |\Delta y_{c.o,\max}|)^2 / \beta_{y;\max}$, где $\Delta p/p_{\max} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ – максимальная полувысота сепаратрисы по импульсному отклонению; $|\Delta x_{c.o,\max}| = |\Delta y_{c.o,\max}| = 5$ мм – максимальные отклонения скорректированной замкнутой орбиты.

³Зависит от используемого метода инжекции пучка.

⁴Зависит от используемого метода инжекции пучка и от режима работы системы охлаждения.

⁵Зависит от режима работы системы электронного охлаждения.

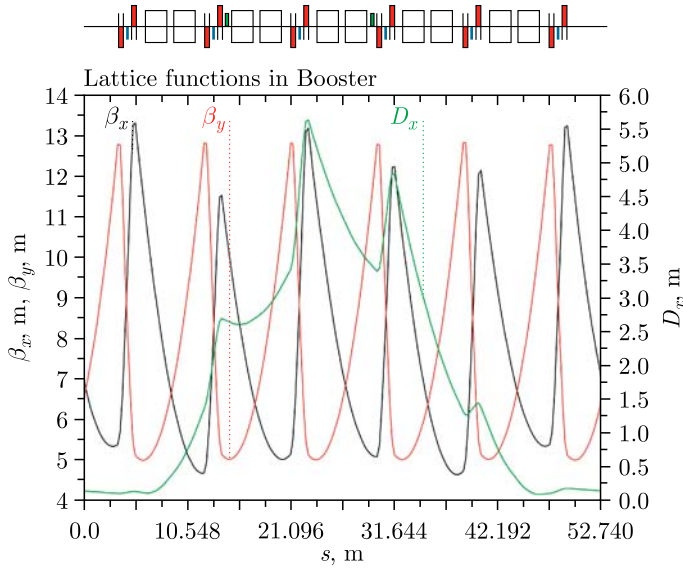


Рис. 1 (цветной в электронной версии). Оптические функции суперпериода бустера при энергии вывода. Цветом на структуре выделены следующие магниты: зеленый — мультипольный корректирующий, красный — квадрупольный, синий — дипольный корректирующий

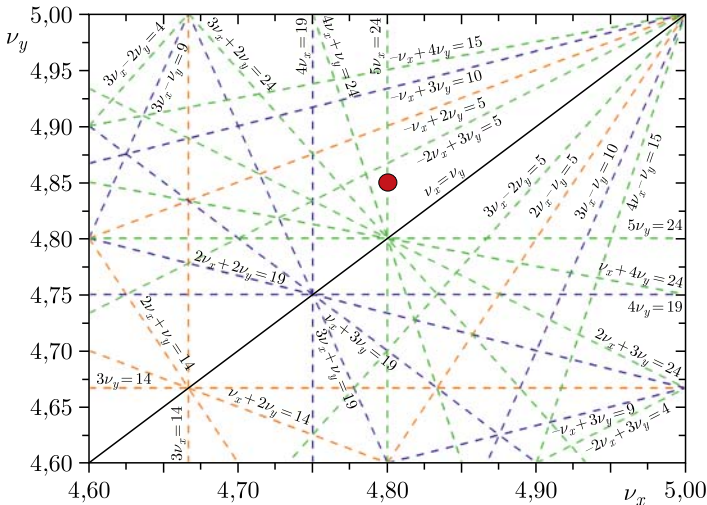


Рис. 2. Положение рабочей точки бустера ($\nu_x = 4,80, \nu_y = 4,85$) на рабочей диаграмме с указанием близлежащих резонансов до 5-го порядка

Динамическая апертура (или *аксептанс*) (ДА) — область положения частиц (координат) в шестимерном фазовом пространстве, где устойчиво их движение в ведущем электромагнитном поле ускорителя с учетом возмущений. Под возмущениями здесь понимаются систематические и случайные погрешности магнитооптических

элементов ускорителя, ВЧ-станций, силы пространственного заряда, импеданс пучковой камеры и т. д. Силы таких возмущений могут нелинейно зависеть от амплитуды бетатронных и синхротронных колебаний частиц. Достаточно слабые ($\approx 10^{-4}$ от основной величины поля) нелинейные возмущения могут вызвать потерю частиц на стенках вакуумной камеры ускорителя. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только поперечной ДА (без рассмотрения синхротронного движения). Для решения задачи нахождения ДА ускорителя существуют как аналитические, так и численные методы. Для использования численных методов выполняется трассировка (трекинг) в математической модели ускорителя.

Для оценки ДА можно ввести понятие максимальной начальной амплитуды колебаний частиц $A_{x,y}(s)$ или вектор в пространстве поперечных координат (x, x', y, y') , при котором частица остается устойчивой в течение требуемого времени или количества оборотов N_{turn} . Очевидно, для рационального использования возможностей установки должно выполняться условие (на каждом азимуте) $A_{x,y}(s) > A'_{x,y}(s)$, где $A'_{x,y}(s)$ — геометрический аксептанс кольца (см. табл. 1).

Для проверки указанного условия необходимо решить следующие задачи: определить величину ДА по результатам численного моделирования, оценить влияние различных возмущений на величину ДА, а также сравнить со значением аксептанса кольца (150 и 58π мм·мрад для горизонтальной и вертикальной плоскости соответственно) полученную величину ДА.

В работе выполнен расчет ДА с учетом результатов магнитных измерений элементов бустера и проведено сравнение с аксептансом кольца. Моделирование динамической апертуры выполнялось с помощью программного комплекса MAD-X [7] с использованием алгоритма симплектического трекинга РТС (Polymorphic tracking code) [8].

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [4] проводился расчет ДА, по результатам которого были определены допуски на погрешности магнитооптических элементов (величина ДА составила $\approx 600\pi$ мм·мрад). В 2019 г. на базе Лаборатории физики высоких энергий ОИЯИ завершилась сборка и испытание магнитов бустера NICA. Каждый магнит прошел процедуру магнитных измерений [9, 10], результаты которых приведены в [11, 12]. Средние значения параметров, используемых при моделировании, и их среднеквадратичные отклонения (СКО) представлены в табл. 2. Распределение параметров задано нормальным, с соответствующим СКО при помощи встроенного генератора случайных чисел программного комплекса MAD-X. Значения «гармоник» магнитного поля определены в виде среднеинтегральных значений относительно основной (дипольной или квадрупольной) компоненты поля:

$$b(a)_n = \frac{1}{n!} \frac{r_{\text{ref}}^n}{B_{\text{ref}}} \frac{\partial^n B_y(x)}{\partial x^n}; \quad b(a)_n^{\text{int}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} b(a)_n(s)}{L_{\text{eff}}},$$

где n — номер «гармоники» (начиная с $n = 0$); B_{ref} — основная компонента поля (B_0 для дипольного, B_1 для квадрупольного соответственно) на радиусе r_{ref} ; L_{eff} — эффективная длина магнита.

Таблица 2. Результаты магнитных измерений, используемые при моделировании ($r_{\text{ref}} = 30 \text{ мм}$)

Параметр	Дипольный магнит		Квадрупольный магнит	
	Среднее	СКО	Среднее	СКО
При энергии инжекции (3,2 МэВ/нуклон)				
α (tilt), мрад	-1,3	1,7	—	0,1
$dX = dY$, мм	—	—	—	0,1
B_0L (B_1L), Тл·мм	—	0,19	—	0,06
$b_2 \cdot 10^{-4}$	-0,8	0,6	-2,1	4,6
$a_2 \cdot 10^{-4}$	—	—	1,3	4,3
$b_3 \cdot 10^{-4}$	—	—	7,6	3,1
$b_5 \cdot 10^{-4}$	—	—	4,9	0,6
При энергии вывода (578 МэВ/нуклон)				
α (tilt), мрад	-1,2	1,6	—	0,1
$dX = dY$, мм	—	—	—	0,1
B_0L (B_1L), Тл·мм	—	2,19	—	0,7
$b_2 \cdot 10^{-4}$	8,5	0,7	-2,0	4,7
$a_2 \cdot 10^{-4}$	—	—	1,3	4,0
$b_3 \cdot 10^{-4}$	—	—	7,1	3,1
$b_5 \cdot 10^{-4}$	—	—	4,2	0,8

Согласно [13, 14] зависимость ДА от количества оборотов можно оценить как

$$D(N_{\text{turn}}) = A + \frac{B}{\log_{10}(N_{\text{turn}})}, \quad (1)$$

где A и B — постоянные коэффициенты. Из (1) видно, что с увеличением количества оборотов величина ДА уменьшается пропорционально $B \cdot \log_{10}^{-1}(N_{\text{turn}})$, стремясь к своей асимптотической величине A . Таким образом, количество оборотов для трекинга выбирается обеспечивающим допустимое отклонение ДА от ее асимптотического значения, с одной стороны, и небольшим для сокращения времени счета, с другой. Кроме того, для расчета частот бетатронных колебаний (см. далее) количество оборотов должно быть пропорционально 2^N , $N \in \mathbb{Z}^+$. Для определения параметров A и B и, следовательно, величины асимптотической ДА выполняется долговременный трекинг [14], что является предметом отдельного исследования. В данной работе расчет выполнен для двумерного и четырехмерного бетатронных движений:

- трекинг 2^{10} оборотов частицы для построения фазовых портретов (x, p_x) и (y, p_y) (двумерная ДА) и зависимостей частот бетатронных колебаний от начальной амплитуды частицы $\nu_x = f(x)$, $\nu_y = f(y)$;

- трекинг 5000 оборотов частицы для построения четырехмерной ДА $A_{x,y}$.

Для задания разброса интегралов магнитного поля и ошибок установки элементов оптики использованы стандартные модули EFCOMP и EALIGN программного комплекса MAD-X [7]. Поскольку основной вклад в «гармоники» магнитного поля вносят краевые эффекты, ошибки поля заданы в виде абсолютно тонких мультиполей на каждом торце магнита. Величина нелинейности в одном таком элементе составляет половину интегральной величины согласно табл. 2.

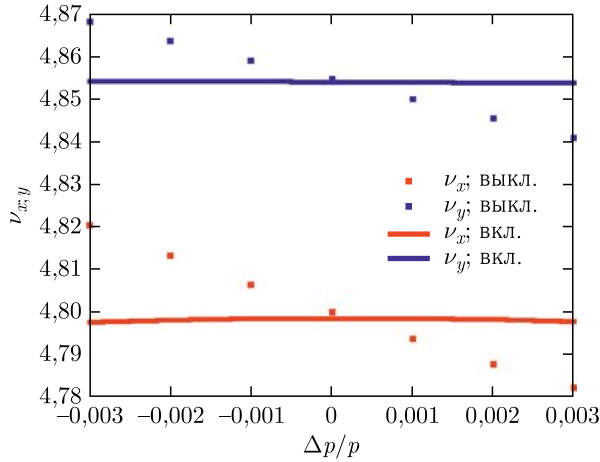


Рис. 3. Влияние системы секступольной коррекции на зависимость $\nu_{x,y}(\Delta p/p)$

Оценка влияния различных ошибок (ошибки положения, мультипольные ошибки магнитного поля и т. д.) проводилась последовательным их добавлением ко всем магнитооптическим элементам, что позволяет оценить влияние тех или иных ошибок на конечный результат. Результаты моделирования можно разделить на следующие типы (также приведены обозначения в легендах графиков):

- без ошибок: No Errors;
- ошибки положения элементов (поворот элемента вокруг продольной оси и смещение магнитной оси элемента относительно геометрической): Align;
- ошибки положения (см. выше) и разброс интегральной величины основной (дипольной или квадрупольной) компоненты поля элементов: Align+Int;
- все ошибки, заданные по средним значениям, согласно табл. 2: Total;
- все ошибки, заданные с учетом средних значений и СКО, согласно табл. 2: Total+Rnd. Выполнено 2000 «розыгрышей» разбросов параметров.

Для коррекции положения рабочей точки для частиц с импульсным разбросом (рис. 3) (натуральной хроматичности) и компенсации секступольных ошибок магнитных полей элементов (см. табл. 2) в бустере предусмотрена система секступольных корректирующих магнитов. Поскольку включение этой системы приводит к появлению дополнительных нелинейных возмущений, что, в свою очередь, может приводить к уменьшению ДА, ее влияние также оценивалось для каждого рассматриваемого случая (моделирование выполнено с выключенной и включенной системой).

Начальная точка трекинга выбрана в середине прямолинейного участка первого суперпериода (точка инжекции в бустер), вектор начального состояния в фазовом объеме определен как $\mathbf{s}_0 = (x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0})^T$.

Двумерное бетатронное движение. Рассмотрим поперечное бетатронное движение частицы в ускорителе при отсутствии связи вертикального и горизонтального движений. Преобразование координат в фазовом пространстве при переходе из точки $\mathbf{x}_0 = (x_0, p_{x0})$ в точку $\mathbf{x}_1 = (x_1, p_{x1})$ ($\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$) описывается с помощью отображения Пуанкаре (\mathcal{M}) [15]: $\{\mathcal{M}: \mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{M}^{(1)}(\mathbf{x}_n), \forall n \in \mathbb{Z}^+\}$. Для описания преобразования координат в фазовом пространстве при прохождении через все элемен-

ты ускорителя удобно ввести понятие однооборотного отображения (one-turn map), представляющего собой композицию отображений Пуанкаре для каждого элемента: $\mathbf{M} = \mathcal{M}^n \circ \mathcal{M}^{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{M}^2 \circ \mathcal{M}^1$. Множество всех однооборотных отображений составляет сечение Пуанкаре: $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n\}$. Если магнитооптическая структура ускорителя является периодической: $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}(s_L) = \mathbf{x}(s_0 + L)$, где L — периметр ускорителя, s — продольная координата, то для многократного прохождения структуры можно записать: $\mathbf{x}(s_L) = \mathbf{M}^N(\mathbf{x}(s_0))$, где N — количество оборотов.

Переход к нормальной (жордановой) форме решения Флоке (преобразование Флоке) [16] с переменными (\hat{x}, \hat{p}_x) :

$$(\hat{x}, \hat{p}_x) = \mathcal{A}^{-1} \circ (x, p_x), \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где α, β — соответствующие параметры Твисса, позволяет получить отображение (или сечение) Эно [17], а также определить переменные угол–действие (J, ψ) [18]. После преобразования (2) радиус фазовой траектории определяется как $R = \sqrt{2J}$, а однооборотное отображение соответствует повороту в фазовом пространстве на угол $\psi = 2\pi\nu$, где ν — соответствующая бетатронная частота.

Использование отображений (или сечений) Пуанкаре и Эно является распространенной техникой анализа сложных динамических систем. Для сечения Эно осью вращения в фазовом пространстве является эллиптическая точка устойчивости, а замкнутые фазовые траектории являются одномерными торами Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) [19]. Наличие нелинейных возмущений приводит к изменению формы фазовой траектории от окружности, а если такие возмущения способны вызывать резонансы, то к разрыву траектории и/или образованию островов стабильности [20].

Для расчета ДА выполнялся трекинг частицы с заданием соответствующих ошибок магнитооптических элементов. Начальная амплитуда частиц изменялась в пределах [1; 46] мм с шагом 5 мм. Полученное сечение Пуанкаре, как сказано выше, позволяет получить сечение Эно, переменные угол–действие и определить ДА как площадь внутри замкнутой фазовой траектории:

$$A_\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\psi)} dR d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\psi)^2 d\psi \rightarrow \\ \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [R_n(\psi)]^2 \equiv \langle R(\psi) \rangle [\pi \text{ м} \cdot \text{рад}]. \quad (3)$$

Результаты моделирования (фазовые портреты и траектории в координатах угол–действие (J, ψ)) для энергии инжекции при наличии всех ошибок (Total), выключенных и включенных секступольных корректоров приведены на рис. 4 и 5 для горизонтального и вертикального движений соответственно.

Ошибки магнитного поля сильнее сказываются на горизонтальном бетатронном движении, в то время как ошибки положения элементов — на вертикальном. Вклю-

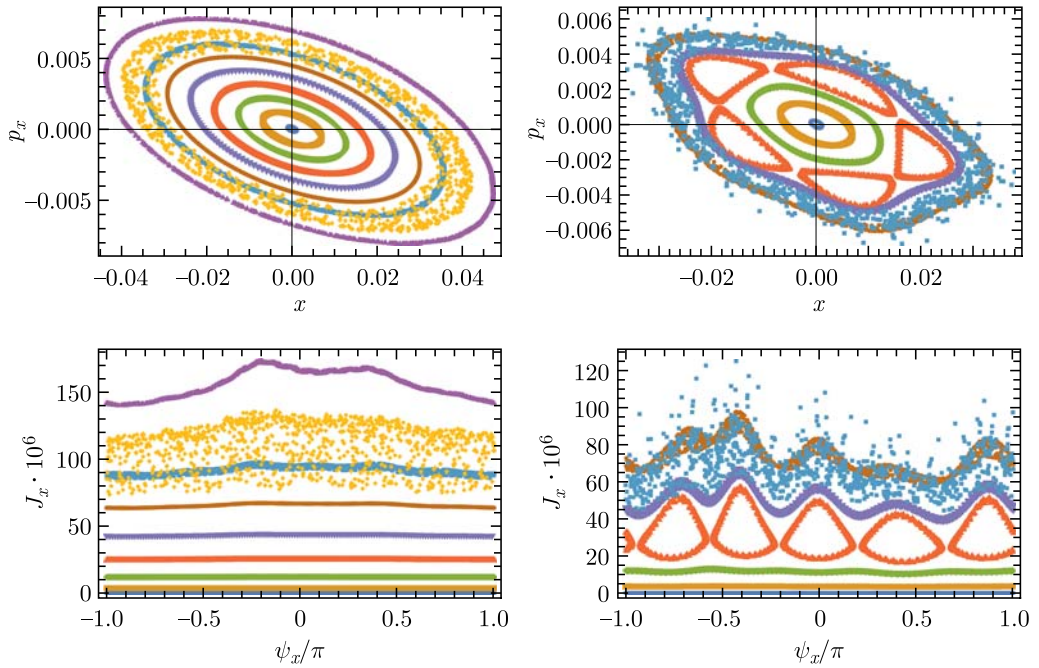


Рис. 4. Фазовые портреты для энергии инжекции при наличии всех ошибок (Total) при выключенных (слева) и включенных (справа) секступольных корректорах в координатах (x, p_x) (сверху) и в координатах (J_x, ψ_x) (снизу)

Таблица 3. Влияние ошибок на двумерную ДА (A_ψ [π мм · мрад]) бустера NICA

Тип моделирования	(\hat{x}, \hat{p}_x)		(\hat{y}, \hat{p}_y)	
	Без коррекции	Коррекция включена	Без коррекции	Коррекция включена
Инжекция				
Без ошибок (No Errors)	400 (∞)	400 (∞)	400 (∞)	400 (∞)
Ошибки, заданные по средним значениям (Total)	310	140	340	320
Ошибки, заданные по средним значениям и СКО (Total+Rnd)	310	160	330	260
Вывод				
Без ошибок (No Errors)	400 (∞)	400 (∞)	400 (∞)	400 (∞)
Ошибки, заданные по средним значениям (Total)	190	220	320	250
Ошибки, заданные по средним значениям и СКО (Total+Rnd)	180	180	310	250

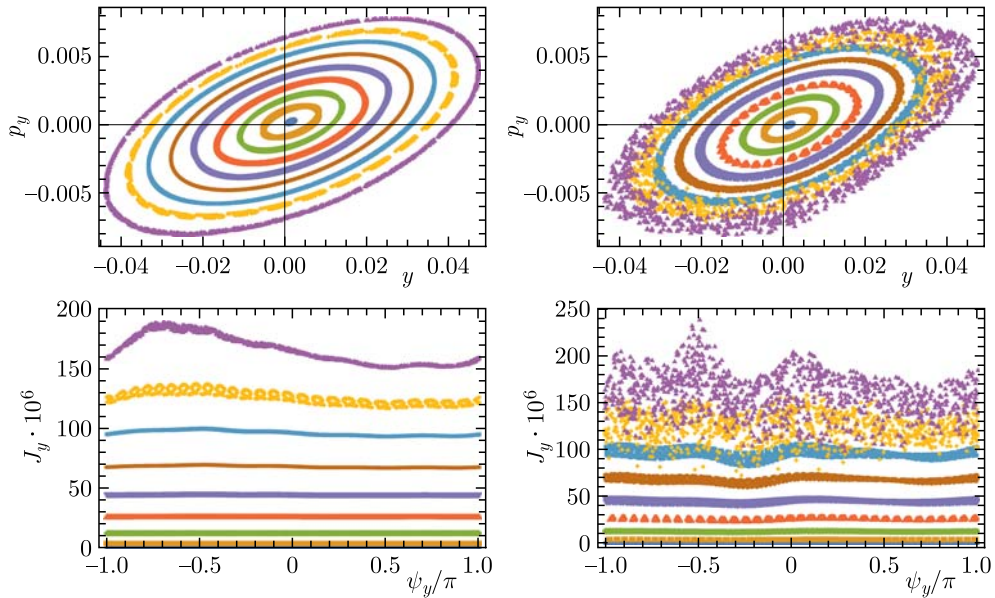


Рис. 5. Фазовые портреты для энергии инжекции при наличии всех ошибок (Total) при выключенных (слева) и включенных (справа) секступольных корректорах в координатах (y, p_y) (сверху) и в координатах (J_y, ψ_y) (снизу)

чение секступольных корректоров при энергии инжекции приводит к появлению островов стабильности и уменьшению ДА. При энергии вывода включение коррекции приводит к выравниванию фазовых портретов (не показано): исчезновению островов стабильности и уменьшению области стохастического движения на границе устойчивости. Влияние ошибок и работы корректоров на появление областей стохастического движения отчетливо видно при построении фазовых траекторий в координатах угол–действие (J, ψ) . Появление островов стабильности и форма искажения фазовых траекторий при увеличении начальной амплитуды (см. рис. 4) указывают на наличие в окрестности положения рабочей точки резонанса 5-го порядка, что согласуется с рабочей диаграммой (см. рис. 2), согласно которой рабочая точка находится в окрестности резонанса $5\nu_x = 24$.

Значения двумерной ДА (A_ψ) (согласно формуле (3)), полученные по результатам трекинга, для каждого типа ошибок приведены в табл. 3. Поскольку ошибки градиента магнитного поля в квадрупольных магнитах не приводят к сдвигу рабочей точки и движение частиц не ограничено размерами ионопровода, ДА является бесконечной при моделировании без учета гармоник магнитных полей элементов. По этой причине значения ДА для этих режимов указаны в табл. 3 для справки и соответствуют максимальной начальной амплитуде частицы при трекинге — 46 мм.

Проведенное моделирование показывает, что при наличии ошибок магнитооптических элементов, взятых из данных магнитных измерений (см. табл. 2), и включенной секступольной коррекции двумерная динамическая апертура составляет:

- на фазовой плоскости (\hat{x}, \hat{p}_x) при энергии инжекции: 140π мм · мрад; при энергии вывода: 220π мм · мрад;

• на фазовой плоскости (\hat{y}, \hat{p}_y) при энергии инжекции: 320π мм · мрад; при энергии вывода: 250π мм · мрад.

При энергии инжекции и включенной секступольной коррекции ДА меньше величины горизонтального акцептанса кольца (150π мм · мрад). Данный режим требует дополнительного исследования, поскольку недостаточная величина ДА может быть обусловлена условиями «розыгрыша» ошибок полей магнитооптических элементов ускорителя (на что косвенно указывает увеличение значения ДА при режиме Total+Rnd) и будет достаточной при учете расстановки элементов. На вертикальной фазовой плоскости полученная величина ДА превышает акцептанс кольца (58π мм · мрад) в ≈ 4 раза при включенной секступольной коррекции и составляет 260π мм · мрад.

При энергии вывода горизонтальная ДА превышает величину соответствующего акцептанса кольца в 1,5 раза при включенной секступольной коррекции. Вертикальная ДА превышает величину соответствующего акцептанса кольца в 4,3 раза при включенной секступольной коррекции.

Другой важный результат, который позволяет получить исследование результатов трекинга и фазовых портретов (x, p_x) и (y, p_y) , — определение зависимости частоты бетатронных колебаний от начальной амплитуды $\nu_x = f(x), \nu_y = f(y)$. Применение

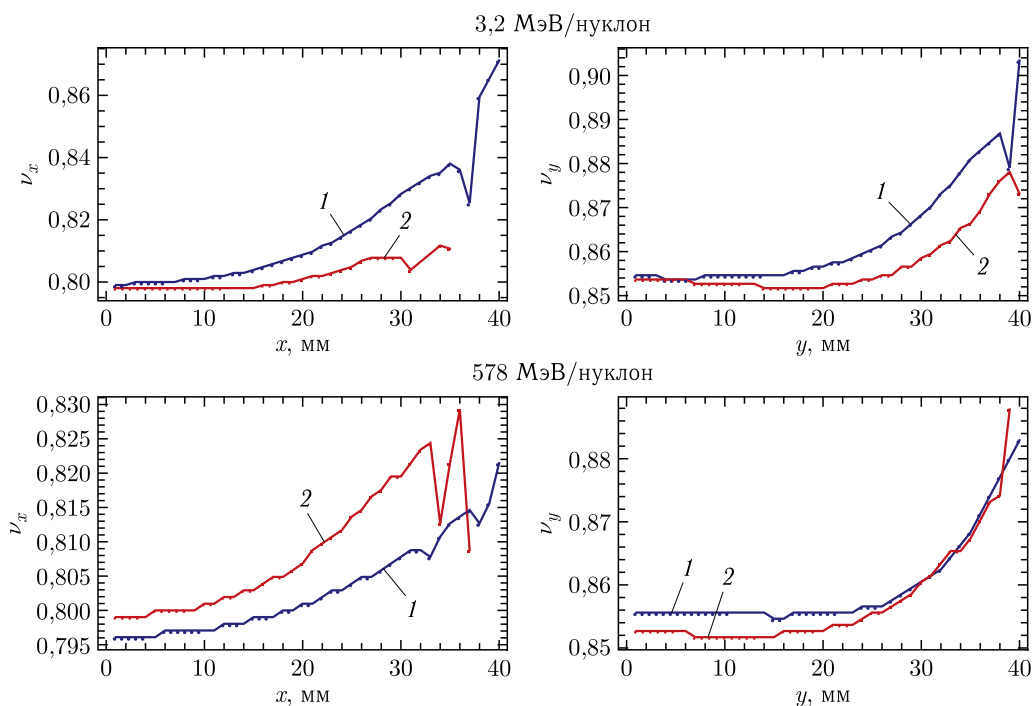


Рис. 6 (цветной в электронной версии). Зависимость бетатронной частоты от начальной амплитуды $\nu_x = f(x)$ (слева) и $\nu_y = f(y)$ (справа) при наличии всех ошибок (Total), при выключенных (синяя кривая, 1) и включенных (красная, 2) секступольных корректорах для энергий инжекции (сверху) и вывода (снизу)

алгоритма численного анализа несущей частоты (NAFF) [16, 21] позволяет определить дробную часть бетатронной частоты при помощи дискретного преобразования Фурье (ДПФ) пооборотных координат частицы при начале движения с заданной амплитудой. Полученные зависимости представлены на рис. 6.

При сравнении зависимостей $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$ с соответствующими сечениями Пуанкаре (см. рис. 4 и 5) становится очевидно, что наличие ошибок полей магнитооптических элементов ускорителя напрямую сказывается на бетатронной частоте, что, в свою очередь, приводит к появлению областей стохастического движения или островов стабильности в фазовом пространстве. Например, для случая с включенными корректорами при энергии инжекции (см. рис. 6, красная кривая, 2) рост бетатронных колебаний начинается только после появления островов стабильности на фазовой плоскости. Такой результат в полученных моделировании данных отражает точную корреляцию между поведением частицы в фазовом пространстве и зависимостью бетатронной частоты от начальной амплитуды.

При включении системы секступольной коррекции смещение бетатронных частот происходит даже на малых амплитудах (отчетливо наблюдается для энергии вывода на рис. 6). Это происходит из-за дополнительной фокусировки, при возмущении замкнутой орбиты и из-за отклонения пучка от идеальной траектории в секступольных корректорах (так называемого feed-down-эффекта [22]). Для проверки этой гипотезы авторами выполнено дополнительное моделирование при скорректированной замкнутой орбите, показавшее отсутствие различий бетатронных частот частиц на малых амплитудах, что также согласуется с [23].

Полученные результаты показывают:

- для энергии инжекции включение секступольных корректоров приводит к ослаблению зависимостей $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$ ($\nu_x(35 \text{ мм}) - \nu_x(0) = 0,01$, $\nu_y(35 \text{ мм}) - \nu_y(0) = 0,0225$), при этом максимальная начальная амплитуда в горизонтальной плоскости уменьшается на 5 мм (с $x = 40$ мм до $x = 35$ мм);
- для энергии вывода включение секступольных корректоров не оказывает значительного влияния на зависимость $\nu_y(y)$ и, напротив, увеличивает зависимость $\nu_x(x)$ ($\nu_x(35 \text{ мм}) - \nu_x(0) = 0,025$), максимальная начальная амплитуда в горизонтальной плоскости уменьшается на 3 мм (с $x = 40$ мм до $x = 37$ мм).

Четырехмерное бетатронное движение. Анализ динамической апертуры производился в пространстве поперечных инвариантов Куранта–Снайдера [24]:

$$\begin{aligned} W_x &= \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x'x + \beta_x x'^2, \\ W_y &= \gamma_y y^2 + 2\alpha_y y'y + \beta_y y'^2. \end{aligned}$$

Начальное положение частицы задавалось на полярной сетке:

$$x_0 = r_i \cos \theta_j, \quad y_0 = r_i \sin \theta_j, \quad 0 \geq \theta_j \geq \pi.$$

Соответствующие величины эмиттансов:

$$\varepsilon_x = \frac{x_0^2}{\beta_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{y_0^2}{\beta_y}.$$

Затем проводился трекинг для N оборотов и выбирался ансамбль частиц с максимальной начальной амплитудой, при которой движение оставалось устойчивым

на каждом азимуте: $r(\theta) \approx r[\theta_j] \rightarrow \max_i \{r_i(\theta_j, N)\}$. После чего ДА вычислялась как [13, 25]

$$A_{r,\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi r(\theta) d\theta \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [r_n(\theta)]^2 \equiv \langle r(\theta) \rangle \text{ [м]}. \quad (4)$$

Результаты моделирования для 5000 оборотов показаны на рис. 7. Величина среднеквадратичного эмиттанта (см. табл. 1) $\varepsilon_{x,y} = 1 \pi \text{ мм} \cdot \text{мрад}$. Как видно, при нали-

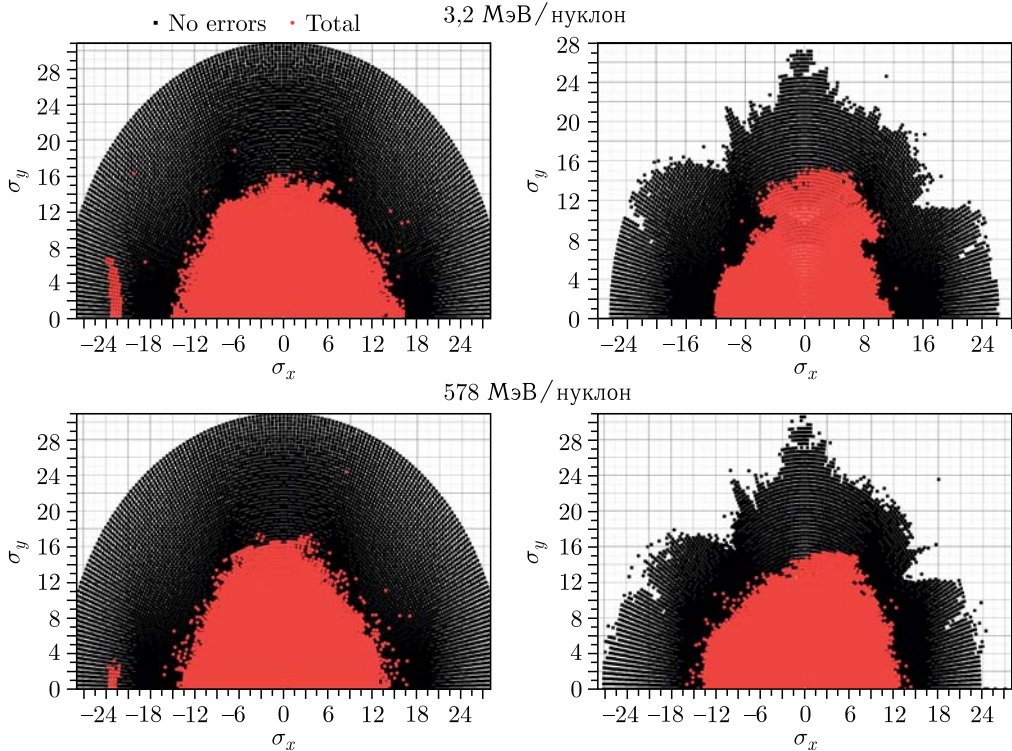


Рис. 7. Четырехмерная ДА при выключенных (слева) и включенных (справа) секступольных корректорах для энергий инжекции (сверху) и вывода (снизу)

Таблица 4. Влияние ошибок на четырехмерную ДА ($A_{r,\theta}$ [мм]) бустера NICA

Тип моделирования	Инжекция		Вывод	
	Без коррекции	Коррекция включена	Без коррекции	Коррекция включена
Без ошибок (No Errors)	79,0 (∞)	63,3	79,0 (∞)	63,3
Ошибки, заданные по средним значениям (Total)	37,4	34,7	38,3	36,3
Ошибки, заданные по средним значениям и СКО (Total+Rnd)	37,2	35,0	38,6	36,6

чий ошибок согласно табл. 2 граница области устойчивого движения имеет радиус $\langle r(\theta) \rangle \approx 37$ мм, что соответствует 12σ . Включение секступольных корректоров приводит к незначительному уменьшению ДА (на 1 мм ($\approx 3\sigma$) и 0,4 мм ($\approx 1,5\sigma$) при энергиях инжекции и вывода соответственно). Максимальные амплитуды для направлений $(x, 0)$ и $(0, y)$ соответствуют результатам моделирования двумерной ДА. Кроме того, наблюдается влияние нескомпенсированной связи горизонтального и вертикального движений при включении секступольной коррекции на энергии инжекции. Значения четырехмерной ДА для каждого типа ошибок, рассчитанные согласно уравнению (4), представлены в табл. 4.

Рабочая точка $\nu_x/\nu_y = 4,925/4,667$. С целью проверки созданной модели рассмотрено движение пучка для рабочей точки, расположенной в окрестности резонанса 3-го порядка $\nu_x/\nu_y = 4,925/4,667$ (рис. 8), и, аналогично, построены двумерные ДА (рис. 9) и зависимости $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$ (рис. 10).

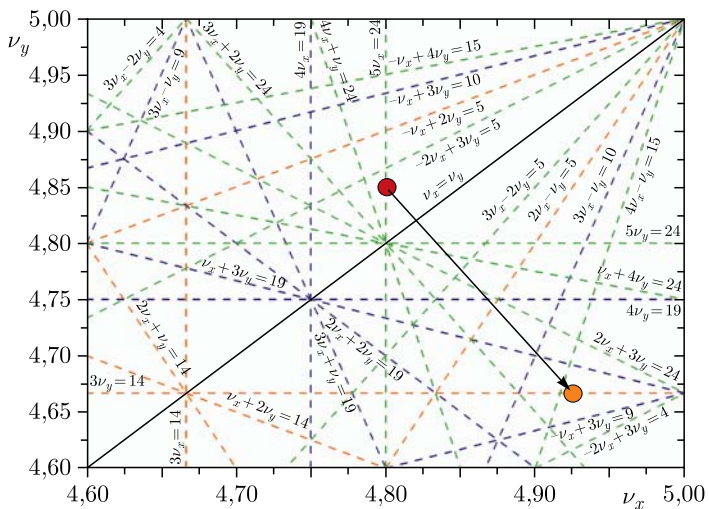


Рис. 8. Изменение положения рабочей точки бустера ($\nu_x = 4,925$, $\nu_y = 4,667$) на рабочей диаграмме с указанием близлежащих резонансов до 5-го порядка

Полученный результат показывает, что работа секступольных корректоров также усиливает действие резонанса 3-го порядка $3\nu_y = 14$, на что указывает уменьшение ДА и искажение формы фазовых траекторий в плоскости (y, p_y) (см. рис. 9), а разработанная модель и методика позволяют определять близлежащие резонансы различных порядков.

Зависимости $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$ (см. рис. 10) более слабые, чем для рабочей точки $\nu_x/\nu_y = 4,8/4,85$, но также находятся в согласии с фазовыми портретами (отражают появление областей стохастического движения), а включение корректоров тоже уменьшает зависимости $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$. Отличие бетатронных частот у частиц с малой амплитудой при включении системы секступольной коррекции (см. рис. 10) обусловлено возмущенной замкнутой орбитой в местах установки секступольных корректоров.

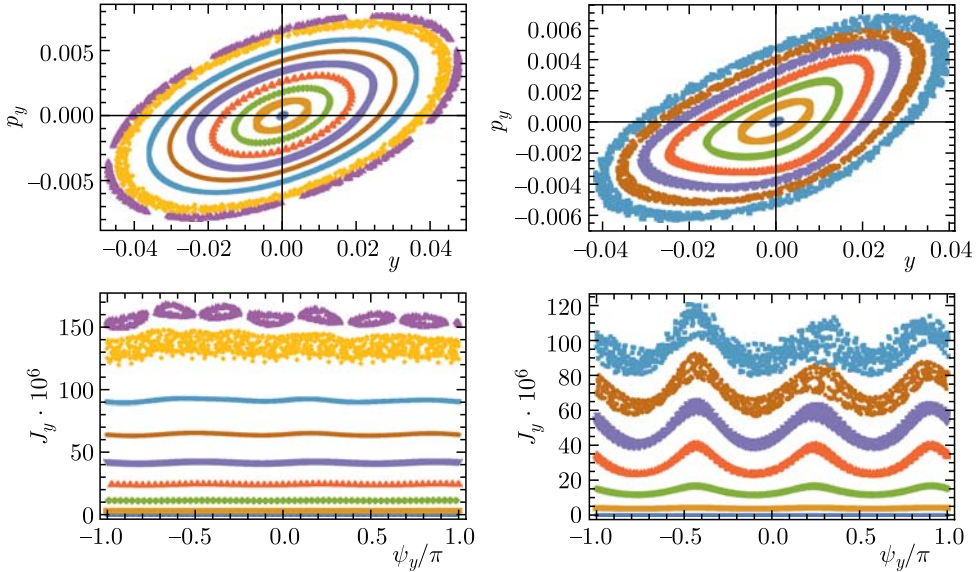


Рис. 9. Фазовые портреты для энергии инжекции при наличии всех ошибок (Total), при выключенных (слева) и включенных (справа) секступольных корректорах: в координатах (y, p_y) (сверху) и в координатах (J_y, ψ_y) (снизу). Рабочая точка $\nu_x/\nu_y = 4,925/4,667$

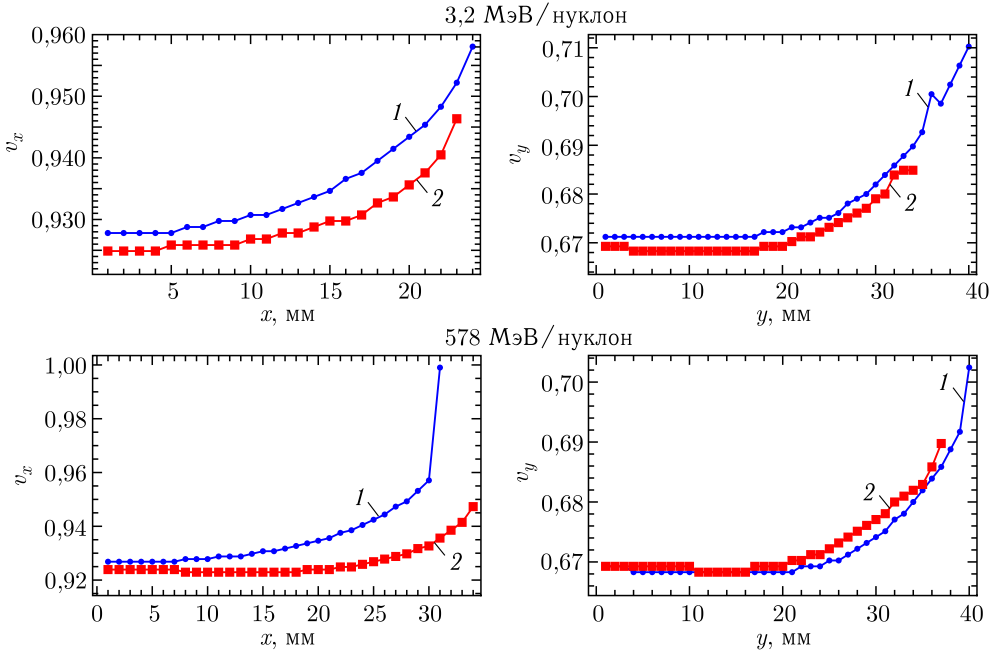


Рис. 10. Зависимость бетатронной частоты от начальной амплитуды $\nu_x(x)$ (слева) и $\nu_y(y)$ (справа) при наличии всех ошибок (Total), при выключенных (синяя кривая, 1) и включенных (красная, 2) секступольных корректорах для энергий инжекции (сверху) и вывода (снизу). Рабочая точка $\nu_x/\nu_y = 4,925/4,667$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено влияние ошибок элементов магнитооптической структуры бустера ускорительного комплекса NICA на поперечную динамическую апертуру установки для энергий инжекции и вывода пучка. Для моделирования ДА и оценки влияния ошибок на нее разработана методика. Оценка ДА выполнена в двумерном и четырехмерном фазовых пространствах.

Создана модель магнитооптической структуры бустера в программном комплексе MAD-X, позволяющая учитывать распределения параметров элементов на основании результатов магнитных измерений. Для энергии инжекции двумерная ДА в горизонтальной и вертикальной фазовых плоскостях превышает величину горизонтального и вертикального аксептанса кольца (150 и 58π мм·мрад соответственно) более чем в 2 раза (310 и 330π мм·мрад соответственно). Для энергии вывода двумерная ДА в горизонтальной и вертикальной фазовых плоскостях составляет 180 и 310π мм·мрад соответственно, что также превышает величину горизонтального и вертикального аксептанса кольца. Включение секступольной коррекции на энергии инжекции сильнее сказывается на величине горизонтальной, чем вертикальной ДА (уменьшаются до 160 и 260π мм·мрад соответственно). Для энергии вывода включение секступольной коррекции не сказывается на величине горизонтальной ДА и приводит к уменьшению вертикальной ДА до 250π мм·мрад.

С помощью применения алгоритма численного анализа несущей частоты (NAFF) были построены зависимости частот бетатронных колебаний от начальных амплитуд $\nu_x = f(x)$ и $\nu_y = f(y)$ по результатам трекинга. Полученные зависимости показывают, что для энергии инжекции включение секступольных корректоров приводит к уменьшению сдвига $\nu_x(x)$ и $\nu_y(y)$, при этом максимальная начальная амплитуда в горизонтальной плоскости уменьшается на 5 мм. Для энергии вывода работа секступольных корректоров не оказывает значительного влияния на зависимость $\nu_y(y)$ и, напротив, увеличивает сдвиг $\nu_x(x)$, а максимальная начальная амплитуда в горизонтальной плоскости уменьшается на 3 мм. Кроме того, полученные зависимости показывают согласие с поведением частиц в соответствующем фазовом пространстве (резкие скачки, отражающие наличие областей стохастичности и островов стабильности на фазовых портретах).

Величина четырехмерной ДА составляет 12σ (для энергий инжекции и вывода), а включение секступольных корректирующих магнитов приводит к незначительному (на $\approx 3\sigma$) ее уменьшению. Максимальные начальные амплитуды $(x, 0)$ и $(0, y)$ совпадают для двумерного и четырехмерного моделирования.

Для проверки созданной модели магнитооптической структуры бустера дополнительно рассмотрен режим работы в другой рабочей точке. Была выбрана точка ($\nu_x/\nu_y = 4,925/4,667$) в окрестностях резонанса 3-го порядка $3\nu_y = 14$, и также построены двумерные ДА и зависимости $\nu_x = f(x)$ и $\nu_y = f(y)$. Полученный результат подтвердил чувствительность модели к положению рабочей точки в окрестностях вертикальных и горизонтальных резонансов различных порядков и согласованность $\nu_x = f(x)$ и $\nu_y = f(y)$ с движением частиц в фазовом пространстве.

Объектом дальнейшего исследования является оптическая структура бустера с учетом расстановки магнитных элементов, планируется проведение моделирования при энергии электронного охлаждения, расчет шестимерной (с учетом синхротрон-

ного движения) и долговременной (для определения асимптотической величины) ДА при всех трех значениях энергии (инжекция, электронное охлаждение, вывод). В будущем необходимо провести исследование и моделирование последовательной настройки бустера (выполнить коррекцию замкнутой орбиты, связи горизонтального и вертикального бетатронных движений, натуральной хроматичности и величины ДА) для сверки результатов и разработанной методики с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Syresin E. et al. Status of Accelerator Complex NICA // Proc. of the 26th Russ. Part. Accel. Conf. (RUPAC'18), Protvino, Russia, Oct. 1–5, 2018. No.26. Geneva: JACoW Publ., 2018. P. 12–16; <https://doi.org/10.18429/JACoW-RUPAC2018-MOXMH03>; <http://jacow.org/rupac2018/papers/moxmh03.pdf>.
2. Tuzikov A. et al. Booster Synchrotron at NICA Accelerator Complex // Proc. of Russ. Part. Accel. Conf. (RuPAC'16), St. Petersburg, Russia, Nov. 21–25, 2016. No.25. Geneva: JACoW, 2017. P. 160–162; doi:10.18429/JACoW-RuPAC2016-FRCAMH05; <http://jacow.org/rupac2016/papers/ircamh05.pdf>.
3. Kazinova O. et al. Simulation of Closed Orbit Correction for the Nuclotron Booster // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15, No. 7. P. 854–857; <https://doi.org/10.1134/S1547477118070051>.
4. Бутенко А. В., Казимова О., Костромин С. А., Михайлов В. А., Тузилов А. В., Ходжибагиян Г. Г. Допуски на погрешности магнитного поля бустера нуклотрона. Сообщ. ОИЯИ P9-2017-18. Дубна, 2017; [http://www1.jinr.ru/Preprints/2017/018\(P9-2017-18\).pdf](http://www1.jinr.ru/Preprints/2017/018(P9-2017-18).pdf).
5. Shandov M. M. et al. Correctors' Magnets for the NICA Booster and Collider // Phys. Part. Nucl. Lett. 2020. V. 17, No. 4. P. 535–538; <https://doi.org/10.1134/S154747712004041X>.
6. Khodzhibagiyan H. et al. Superconducting Magnets for the NICA Accelerator Collider Complex // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2014. V. 24, No. 3. P. 1–4.
7. Methodical Accelerator Design. 2020. <https://mad.web.cern.ch/mad/>.
8. Schmidt F., Forest E., McIntosh E. Introduction to the Polymorphic Tracking Code: Fibre Bundles, Polymorphic Taylor Types and “Exact Tracking”. CERN-SL-2002-044-AP. KEK-REPORT-2002-3. Geneva, 2002; <https://cds.cern.ch/record/573082>.
9. Kostromin S. A. et al. Measurement of the Magnetic-Field Parameters of the NICA Booster Dipole Magnet // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13, No. 7. P. 855–861; <https://doi.org/10.1134/S1547477116070323>.
10. Донягин А. М., Борисов В. В., Казимова О., Костромин С. А. Измерение магнитных характеристик элементов бустерного синхротрона комплекса NICA // Прикл. физика. 2017. № 4. С. 16–21.
11. Borisov V. et al. Magnetic Measurements of the NICA Booster Superferric Magnets // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2018. V. 28, No. 3. P. 1–5.
12. Shemchuk A. et al. Serial Magnetic Measurements of Quadrupole Magnets of the NICA Booster Synchrotron // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15, No. 7. P. 873–877.
13. Giovannozzi M., Scandale W., Todesco E. Dynamic Aperture Extrapolation in the Presence of Tune Modulation // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 3432–3443; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.57.3432>.
14. Большаков А. Е., Зенкевич П. Р., Козлов О. С. Исследование асимптотической динамической апертуры в коллайдере NICA с использованием программ симплектического трекинга // Письма в ЭЧАЯ. 2015. Т. 12, № 7. С. 1289–1297.
15. Bazzani A., Servizi G., Todesco E., Turchetti G. A Normal Form Approach to the Theory of Nonlinear Betatronic Motion. CERN Yellow Reports: Monogr. Geneva: CERN, 1994; <http://cds.cern.ch/record/262179>.

16. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматлит, 1962.
17. Hénon M. Numerical Study of Quadratic Area-Preserving Mappings // Quart. Appl. Math. 1969. V. 27. P. 291–312; <https://www.ams.org/journals/qam/1969-27-03/S0033-569X-1969-0253513-5/>.
18. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.
19. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМНХ. 1963. Т. VIII, № 6. С. 91–192.
20. Лихтенберг А. Дж., Либерман М. А. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
21. Laskar J. The Chaotic Motion of the Solar System: A Numerical Estimate of the Size of the Chaotic Zones // Icarus. 1990. V. 88. P. 266–291.
22. Dowd R. T., Tan Y. E. Beam Based Sextupole Alignment Studies for Coupling Control at the ASLS // Proc. of the 2nd Intern. Part. Accel. Conf. (IPAC'11), San Sebastián, Spain, Sept. 4–9, 2011. Geneva: JACoW Publ., 2011. P. 1995–1997.
23. Левичев Е. Б. Лекции по нелинейной динамике частиц в циклическом ускорителе. Новосибирск: НГТУ, 2009.
24. Courant E. D., Snyder H. S. Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // Ann. Phys. 1958. V. 3. P. 1–48; <https://cds.cern.ch/record/593259>.
25. Todesco E., Giovannozzi M. Dynamic Aperture Estimates and Phase Space Distortions in Nonlinear Betatronic Motion // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4067–4076; <https://cds.cern.ch/record/292371>.

Получено 3 декабря 2021 г.