Письма в ЭЧАЯ. 2022. Т. 19, № 4(243). С. 247–256

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ЛАГРАНЖЕВА ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Н. А. Тюрин [1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Каждое алгебраическое многообразие может быть рассмотрено как симплектическое многообразие, снабженное кэлеровой формой ходжева типа. Поэтому естественной является задача исследований лагранжевой геометрии произвольного алгебраического многообразия. Представляем две конструкции, применимые для достаточно широкого класса алгебраических многообразий.

Every algebraic variety can be regarded as a symplectic manifold equipped with the Kahler form of the Hodge type. Therefore a natural problem arises to study Lagrangian geometry of any algebraic variety. We present two recent constructions which can be applied to a sufficiently wide class of algebraic varieties.

PACS: 11.10.Ef; 02.40.–k

ВВЕДЕНИЕ

Вещественное симплектическое многообразие (M, ω), снабженное симплектической формой ω, может рассматриваться как фазовое пространство некоторой классической механической системы. Тогда лагранжевым подмногообразием $S \subset M$ называется подмногообразие размерности $\dim S = (1/2) \dim M$, при ограничении на которое форма зануляется: $\omega|_S \equiv 0$. Первые примеры лагранжевых подмногообразий возникают в рамках теоремы Лиувилля в случае вполне интегрируемых систем; однако в дальнейшем оказалось, что лагранжевы подмногообразия играют важную роль в задачах квантования, а также в зеркальной симметрии. Классификация лагранжевых подмногообразий составляет главную задачу лагранжевой геометрии симплектического многообразия (детали см., например, в [1]).

Каждое компактное алгебраическое многообразие X по самому своему определению (см. [2]) обладает главной поляризацией, т. е. очень обильным линейным расслоением L, задающим вложение $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ в проективное пространство некоторой размерности; если на последнем зафиксирована некоторая стандартная кэлерова форма, то этим задана соответствующая кэлерова форма на X. Такая форма не единственная, но соответствующая ей лагранжева геометрия по существу зависит только от класса когомологий $[\omega] = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

[1] E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

Таким образом, выбор класса $c_1(L)$, реализуемого (очень) обильным расслоением на X, открывает новое направление исследований геометрии X: классификацию лагранжевых подмногообразий. Первый вопрос здесь: какие классы гомологий $\nu_i \in H_n(X,\mathbb{Z})$ реализуются гладкими лагранжевыми подмногообразиями и каковы возможные топологические типы таких подмногообразий?

Пример. Комплексная проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$ имеет по существу единственную симплектическую структуру, определяемую очень обильным расслоением $L = \mathcal{O}(1)$, соответствующую стандартной кэлеровой форме метрики Фубини–Штуди. Относительно недавно были получены ответы на основные вопросы классификации лагранжевых подмногообразий для этого случая, а именно, лагранжевы подмногообразия обязаны быть гомологически тривиальными, реализующими ровно два топологических типа: двумерный тор T^2 и вещественную проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$. При этом доказательство нереализуемости бутылки Клейна гладким лагранжевым подмногообразием потребовало огромных усилий и привлечения самой современной техники.

Более тонкие вопросы классификации лагранжевых подмногообразий состоят в сравнении деформационных типов: если два лагранжевых подмногообразия S_1 и S_2 могут быть связаны семейством лагранжевых подмногообразий S_t, то говорят, что S_1 и S_2 эквивалентны с точностью до лагранжевой деформации; если же, более того, такая деформация реализуется потоком $\phi^t_{X_H}$ гамильтонова векторного поля X_H некоторой функции $H(x,t)$, т. е. $S_2 = \phi^T_{X_H}(S_1)$ для некоторого конечного T, то говорят, что S_1 и S_2 гамильтоново изотопны. Тогда высшим уровнем классификации является вопрос о классификации лагранжевых подмногообразий с точностью до гамильтоновой изотопии относительно фиксированной поляризации $c_1(L)$, класса гомологий $\nu_i \in H_n(X,\mathbb{Z})$ и топологического типа topS. Нетрудно видеть, что ответ в самом деле зависит от класса кэлеровой формы, а не от выбора конкретной формы в фиксированном классе когомологий $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

Пример. Для лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^2$ до недавнего времени высказывалась гипотеза о том, что с точностью до гамильтоновой изотопии реализуются только стандартные торы Лиувилля, однако в 1996 г. Ю. Чеканов в [3] построил пример экзотического тора, обладающего теми же периодами, что тор Клиффорда, однако не эквивалентный этому тору. В дальнейшем были построены примеры других экзотических торов, но проблема классификации до сих пор не закрыта.

Напомним, что комплексная проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$, как и пространство любой размерности, является фазовым пространством вполне интегрируемой системы. Зафиксируем однородные координаты $[z_0 : z_1 : z_2]$ и рассмотрим пару гладких вещественных функций

$$\mu_1 = \frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{\sum_{i=0}^{2} |z_i|^2}, \quad \mu_2 = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{\sum_{i=0}^{2} |z_i|^2}.$$

Эти функции удовлетворяют коммутационному соотношению $\{\mu_1,\mu_2\} = 0$ и являются алгебраически независимыми почти всюду (детали см. в [5]). Торы Лиувилля — совместные множества уровня функций μ_i — описываются как $\{|z_i| = r_i\}$, откуда легко видеть, что это и в самом деле двумерные торы.

В алгебраической геометрии аналоги фазовых пространств вполне интегрируемых систем, подобных проективным пространствам, составляют очень важный класс торических многообразий. Оказывается, что конструкция Ю. Чеканова может быть реализована на любом торическом многообразии. Таким образом, кроме стандартных торов любое торическое алгебраическое многообразие допускает экзотические торы типа Чеканова.

1. ОБОБЩЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ЧЕКАНОВА

Торическая геометрия представляет собой раздел геометрии, в котором алгебраическая геометрия не отличима от симплектической, и даже более того — все решает простая комбинаторика. В самом деле, Т. Дельцан показал, что вся информация о торическом многообразии закодирована в простом комбинаторном объекте, выпуклом многограннике P_X, по которому восстанавливается в явном виде и симплектическая, и алгебраическая структуры, см. [4]. Грани многогранника P_X подлежат набору алгебраических подмногообразий, составляющих граничный дивизор, из разбиения которых можно построить семейство алгебраических подмногообразий, обладающих специальным свойством. Одномерное семейство алгебраических подмногообразий, называемое пучком, определяет обобщенное отображение в комплексные числа, которым можно заменить один из первых интегралов.

Более конкретно, для $\mathbb{CP}^2$ выпуклым многогранником является треугольник, совпадающий с образом

$$(\mu_1, \mu_2) : \mathbb{CP}^2 \to \Delta \subset \mathbb{R}^2;$$

при этом граничный дивизор составлен из трех проективных прямых $l_i = \{z_i = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$. Возьмем из пары первых интегралов (μ_1, μ_2) только один, например первый. Тогда существует пучок квадратичных дивизоров вида $Q_{\alpha,\beta} = \{\alpha z_0 z_1 = \beta z_2^2\} \subset \mathbb{CP}^2$, где пара комплексных чисел $[\alpha, \beta]$ с точностью до умножения на константу однозначно определяют Q. Описание торического действия, индуцируемого μ_1, показывает, что каждая $Q_{\alpha,\beta}$ инвариантна относительно такого действия. Геометрически это означает, что мы расслоили фазовое пространство $\mathbb{CP}^2$ на листы $Q_{\alpha,\beta}$, снабженные торическим действием, индуцируемым μ_1.

Таким образом, для фазового пространства $\mathbb{CP}^2$ вместо классической пары первых интегралов (μ_1, μ_2) рассматривается пара $(\mu_1, \{Q_{\alpha,\beta}\})$, где второй элемент есть обобщенный интеграл — комплекснозначная функция, соответствующая пучку коник на $\mathbb{CP}^2$: интегрируемость предполагает, что гамильтоново действие μ_1 сохраняет слои пучка. Данный пучок коник параметризуется проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ с двумя выделенными точками $p_\pm = [1:0], [0:1]$, которые соответствуют особым слоям $Q_{1,0} = \{z_0 z_1 = 0\}, Q_{0,1} = \{z_2^2 = 0\}$. Тогда произвольная гладкая петля $\gamma \subset \mathbb{CP}^1 \backslash \{p_\pm\}$ порождает лагранжев тор во всем объемлющем пространстве $\mathbb{CP}^2$: в каждом слое $Q_p, p \in \gamma$, выделим петлю условием $\mu_1 = 0$ и затем соберем все эти петли вдоль γ. Нетрудно видеть, что в результате мы получим тор; если γ нестягиваема в $\mathbb{CP}^1 \backslash \{p_\pm\}$, то получившийся тор будет стандартным, если же петля стягиваема, то полученный тор есть экзотический тор Чеканова.

Подобная конструкция может быть реализована для произвольного односвязного торического алгебраического многообразия X.

Прежде всего выделим необходимую информацию из комбинаторики выпуклого многогранника $P_X \subset \mathbb{R}^n$. Многогранник задается r линейными неравенствами, каждое из которых соответствует грани Δ_i многогранника P_X. Каждая грань подлежит алгебраическому дивизору D_i, представляющему соответствующий класс $[D_i]$ в группе Пикара PicX, так что имеется следующая точная последовательность:

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^r \to \mathrm{PicX} \to 0,$$

где первая решетка вложена в $\mathbb{R}^n$, а вторая решетка $\mathbb{Z}^r$ натянута на компоненты D_i граничного дивизора D_b (см. [4]). Таким образом, каждая целая точка $\mathbb{R}^n$ определяет некоторое соотношение на D_i вида

$$\sum_{i=1}^{r} a_i[D_i] = 0 \subset \mathrm{PicX}.$$

Так как каждый дивизор D_i эффективен, будучи реализован алгебраическим подмногообразием, коэффициенты a_i не могут иметь один и тот же знак, откуда следует возможность преобразования последнего равенства к виду

$$\sum_{a_i \geqslant 0} a_i[D_i] = \sum_{a_i < 0} |a_i|[D_i],$$

и мы можем обозначить правую и левую части последнего равенства как D_+ и D_- соответственно. По построению эти дивизоры представляют один и тот же класс $[D_+] = [D_-]$ в группе Пикара. Поскольку наше многообразие X односвязно, этим условием однозначно определено линейное расслоение $L \to X$, так что $c_1(L) = \mathrm{P.D.[D_\pm]}$, обладающее голоморфными сечениями $\alpha_\pm \in H^0(X, L)$ с нулями $(\alpha_\pm)_0 = D_\pm$. Отсюда имеем пучок дивизоров $\langle D_+, D_- \rangle = \{(z_0\alpha_+ + z_1\alpha_-)_0\}$, составленный из нулей голоморфных сечений $z_0\alpha_+ + z_1\alpha_- \in H^0(X, L)$, представляющих проективную прямую $\langle D_+, D_- \rangle \subset |L|$ в полной линейной системе, определяемой голоморфными сечениями расслоения L.

Построенный пучок имеет базисное множество $B = D_+ \cap D_-$, исключая которое из X получаем отображение $\psi : X \backslash B \to \mathbb{CP}^1$; нетрудно видеть, что множество особых слоев этого отображения исчерпывается прообразами точек $p_\pm = \psi(D^0_\pm)$, где $D^0_p = D_p \backslash B = \psi^{-1}(p)$. В координатах $[z_0 : z_1]$ особые слои соответствуют в точности северному и южному полюсам проективной прямой $\langle D_+, D_- \rangle$.

В то же время выбор пучка $\langle D_+, D_- \rangle$ накладывает одно линейное условие на полный набор первых интегралов (или отображений моментов) $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, так что имеется поднабор $(\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_{n-1})$ интегралов, таких что каждый элемент $\tilde{\mu}_j$ сохраняет своим гамильтоновым действием каждый элемент пучка.

Таким образом, для произвольного торического алгебраического многообразия X может быть зафиксирован набор данных $(\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_{n-1}, \psi)$, зависящий от выбора целочисленного направления в $\mathbb{R}^n$. В присутствии этих данных каждая гладкая петля γ в дополнении $\langle D_+, D_- \rangle \backslash \{p_\pm\}$ вместе с подходящим набором значений $c_1, \ldots, c_{n-1}$ первых интегралов $\tilde{\mu}_i$ порождают следующее объединение:

$$T_{\gamma, c_i} = \cup_{p \in \gamma} (\psi^{-1}(p) \cap N(c_1, \ldots, c_{n-1})),$$

где $N(c_1, \ldots, c_{n-1})$ есть совместное множество уровней первых интегралов $\tilde{\mu}_i$. Имеется *теорема* о том, что такое подмножество $T_{\gamma, c_i} \subset X$ есть гладкий лагранжев тор:

если γ нестягиваема в дополнении $\langle D_+, D_- \rangle \backslash \{p_\pm\}$, то данный тор имеет стандартный тип, а если γ стягиваема, то полученный тор является экзотическим, см. [5]. Однако не всякий экзотический тор *a priori* неэквивалентен стандартному — имеется конечный набор значений первых интегралов c_i, разделяющих стандартный и экзотический типы. Выделенные значения связаны с периодами соответствующих торов, которые должны в этих случаях удовлетворять дополнительным целочисленным условиям Бора–Зоммерфельда. В еще более специальном случае, когда алгебраическое многообразие X является многообразием Фано, можно показать, что если имеется стандартный монотонный тор, то найдется и экзотический монотонный тор, см. [6].

Далее, конструкция оказывается применимой для гораздо более общего, нежели торический, случая. Например, многообразие полных флагов F^3 в трехмерном комплексном пространстве не является торическим многообразием, однако в [5] на этом многообразии построена структура вида (μ_1, μ_2, ψ). Вообще многообразие флагов является фазовым пространством систем Гельфанда–Цейтлина, и вследствие этого возможно построить в F^3 не только лагранжевы торы, но и лагранжевы сферы, называемые сферами Гельфанда–Цейтлина. Однако соответствующее описание и конструкции излагаются на языке теории представлений; предлагаемая нами конструкция является как раз чисто геометрической: явно выписывается неполный набор первых интегралов (μ_1, μ_2) и затем строится пучок $\psi : F^3 \backslash B \to \mathbb{CP}^1$, так что слои отображения ψ инвариантны относительно гамильтонова действия μ_i. В отличие от случая торического многообразия параметризующее множество пучка $\mathbb{CP}^1$ содержит три точки p_1, p_2, p_3, подлежащие особым слоям, откуда получаем большее количество типов лагранжевых торов, так как фундаментальная группа проколотого множества $\mathbb{CP}^1 \backslash \{p_1, p_2, p_3\}$ содержит 3 нетривиальных примитивных элемента вместе с тривиальным. Кроме того, как оказалось, лагранжевы сферы Гельфанда–Цейтлина также могут быть описаны в данных терминах: соединим отрезком точки p_i и p_j на параметризующем множестве пучка $\mathbb{CP}^1$ и выберем значения $\mu_1 = \mu_2 = 0$ — этим задается лагранжева сфера в F^3 (причем всего таких сфер 3 в зависимости от выбора концов отрезка), и нетрудно показать, что это в точности сфера Гельфанда–Цейтлина, см. [5].

Структуры вида $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \psi)$ на n-мерных алгебраических многообразиях были названы *псевдоторическими структурами*; выше было показано, что любое компактное односвязное торическое алгебраическое многообразие допускает существование таких структур. Вопрос о том, какие неторические алгебраические многообразия обладают такими структурами, широко открыт для исследований. Более точно, этот вопрос естественно возникает для алгебраических многообразий, допускающих неполное действие тора: а именно, если имеется набор из k первых интегралов $\mu_1, \dots, \mu_k$ на n-мерном алгебраическом многообразии в случае $k < n$.

Класс таких алгебраических многообразий очень обширен. Прежде всего примеры неполных наборов возникают при рассмотрении многообразий, порождаемых проективными пространствами. В качестве простейшего примера рассмотрим многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(1,3)$ проективных прямых в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$ (см. [2]). Само проективное пространство является торическим, поэтому имеем три первых интеграла μ_1, μ_2, μ_3. Но каждый из этих интегралов порождает соответствующее действие на множестве проективных прямых. В самом деле, так как гамильтоново действие каждого μ_i есть однопараметрическая подгруппа кэлеровых изометрий, то порождаемый поток $\phi^t_{X_{\mu_i}}$ сохраняет и кэлерову форму, и комплексную структуру, поэтому комплексное подмногообразие, каковым является любая проективная прямая, переводится этим потоком в другое комплексное подмногообразие того же типа, т. е. в проективную прямую. Этим индуцировано гамильтоново действие на многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}\,(1,3)$ с первыми интегралами F_1, F_2, F_3 относительно кэлеровой формы, индуцируемой вложением Плюккера $\mathrm{Gr}(1,3) \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$, причем соответствующие первые интегралы F_1, F_2, F_3 могут быть легко выражены через стандартные грассмановы координаты. А именно, если $[w_0 : \ldots : w_5]$ есть такие координаты, то многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}\,(1,3)$ представляется комплексной квадрикой $Q_4 = \{w_0w_1 - w_2w_3 + w_4w_5 = 0\} \subset \mathbb{CP}^5$, а функции F_1, F_2, F_3 имеют вид

$$F_i = \frac{|w_{2(i-1)}|^2 - |w_{2i-1}|^2}{\sum\limits_{j=0}^{5} |w_j|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Аналогично строится неполная система первых интегралов для многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}(1,n)$ проективных прямых в n-мерном проективном пространстве: стандартное T^n-действие на проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ индуцирует соответствующее действие на множестве всех проективных прямых, откуда имеем естественное T^n-действие на многообразии $\mathrm{Gr}\,(1,n)$, реализуемом как $2(n-1)$-мерное алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{CP}^{\frac{(n+1)n}{2}}$, снабженное ограничением стандартной метрики Фубини–Штуди. И более обобщенно: то же верно и для любого многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}\,(k,n)$, частичных и полных флагов в $\mathbb{C}^n$, многообразий модулей векторных расслоений над торическими многообразиями и т. п.

Известно много работ и подходов к задаче интегрирования с неполным набором первых интегралов; в качестве одного из наиболее ярких приведем пример *интегрирования по Нехорошеву* (см. [7], теорема 1), поскольку этот пример кажется похожим на конструкцию псевдоторических стуктур. Напомним основные шаги конструкции Нехорошева: для неполной системы $(f_1, \ldots, f_k)$ первых интегралов на фазовом пространстве (M, ω) вещественной размерности $2n$, если $n > k$, ищем набор дополнительных функций $g_1, \ldots, g_{2n-2k}$, алгебраически независимых друг от друга почти всюду и таких, что $\{f_i, g_j\}_\omega \equiv 0$. Такие функции часто называют интегралами, хотя они в строгом смысле таковыми не являются — они не коммутируют друг с другом, но с точки зрения классической механики такое название оправданно, поскольку для любого гамильтониана $H = f_i$ каждая из таких g_j является интегралом вдоль интегральной кривой уравнения Гамильтона с гамильтонианом H. Если такой набор найден, то имеем следующий шаг: рассмотрим совместное множество уровня $N(c_1, \ldots, c_{2n-2k}) = \{g_i = c_i\} \subset M$ вместе с ограничениями $\tilde{f}_j = f_j|_{N(c_1,\ldots,c_{2n-2k})}$. Теорема Нехорошева утверждает, что это торическое симплектическое многообразие, т. е. фазовое пространство вполне интегрируемой системы с полным набором первых интегралов $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k)$. Применяя для этой системы стандартную теорему Лиувилля, получаем послойные координаты «действие–угол», которые включаются в систему обобщенных координат типа «действие–угол», см. [7].

Введение псевдоторических структур было предложено в аналогичной ситуации, см. [5], и основной принцип построения дополнительного отображения ψ на первый взгляд напоминает конструкцию Нехорошева: вместо вещественных интегралов $g_1, \ldots, g_{2k-2}$ мы ищем семейство $2k$-мерных симплектических подмногообразий $D_p, p \in Y$, параметризуемое симплектическим $(2n-2k)$-мерным многообразием (Y, ω_Y). То есть отображение с симплектическими слоями $\psi : M \backslash B \to Y$, где $2k$-мерные слои $D_p = \overline{\psi^{-1}(p)} = \psi_p^{-1} \cup B$ сохраняются гамильтоновым действием каждой из f_i, на самом деле дает тот же результат — расслоение исходного фазового пространства (M, ω) на торические слои, что и конструкция Нехорошева.

В самом деле, в присутствии отображения $\psi : M \backslash B \to Y$ произвольная функция $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ поднимается до соответствующей функции $g = \psi^* h$ на дополнении $M \backslash B$, так что условие $\{f_i, g\}_\omega = 0$ автоматически выполнено. Таким образом, набор координатных функций $(h_1, \ldots, h_{2n-2k})$ поднимается до набора интегралов Нехорошева $g_i = \psi^* h_i$ на дополнении $M \backslash B$, причем каждая из функций может быть продолжена на B так, что общие свойства не будут нарушены.

Однако в обратную сторону соответствие не работает: в случае общей псевдоторической структуры мы имеем дополнительное сильное условие, связывающее симплектические формы ω и ω_Y на исходном объемлющем фазовом пространстве M и параметризующем пространстве Y соответственно, см. [5].

Причина в том, что эти две конструкции решают принципиально разные задачи: конструкция Нехорошева ищет решение системы (т. е. размерность редуцируется вниз), в то время как мы ищем лагранжевы подмногообразия (т. е. размерность редуцируется вверх), что оказывается гораздо более сложной задачей. Таким образом, методы псевдоторической геометрии оказываются полезными в интегрировании Нехорошева, но сами по себе приложимы в гораздо более специальных случаях.

Обратимся теперь к еще одному методу построения лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях (M, ω) с неполным набором первых интегралов $(f_1, \ldots, f_k)$.

2. ОБОБЩЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ МИРОНОВА

В работе [8] А. Миронов предложил новый метод построения и представил новые примеры (гамильтоново) минимальных лагранжевых подмногообразий в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$. Несмотря на то, что эти объемлющие пространства сами по себе являются торическими многообразиями, в конструкциях рассматриваются неполные наборы первых интегралов. Оказывается, методы Миронова могут быть обобщены на широкий класс алгебраических многообразий, допускающих неполное торическое действие.

Наше обобщение метода Миронова основывается на следующем геометрическом наблюдении. Пусть на $2n$-мерном симплектическом многообразии (M, ω) имеется действие тора T^k, индуцируемое набором первых интегралов (или отображений моментов) $(f_1, \ldots, f_k)$. Пусть в некотором общем совместном множестве уровня $N_{c_i} = \{f_1 = c_1, \ldots, f_k = c_k\}$ имеется изотропное $n-k$-мерное подмногообразие $S \subset N_{c_i}$, так что в каждой точке $p \in S$ ранг подпространства $T_p S \oplus \mathbb{R}\langle X_{f_1}, \ldots, X_{f_k} \rangle \subset T_p M$ строго равен n (иными словами, S строго трансверсально действию тора T^k). Тогда результатом применения T^k-действия к S будет лагранжево подмногообразие $T^k S \subset M$, возможно, с точками самопересечения.

Главный вопрос в данной конструкции: если имеется T^k-действие на (M, ω), то откуда взять изотропное подмногообразие S в совместном множестве уровня N_{c_i}? Один из возможных ответов таков: пусть исходно имеется лагранжево подмногообразие $\tilde{S} \subset M$, тогда пересечение $S = N_{c_i} \cap \tilde{S} \subset N_{c_i}$ обязано быть изотропным. Если какие-то из симметрий, порождаемых X_{f_i}, сохраняют $\tilde{S}$, то пересечение S также будет сохраняться этими же симметриями, но при этом размерность S будет нетрансверсальной, равной $n-k$ плюс число симметрий. Поэтому $T^k S$ будет иметь необходимую размерность. В вырожденном случае, когда $\tilde{S}$ инвариантно относительно всего T^k, то $T^k S$ просто совпадет с исходным $\tilde{S}$; если же $\tilde{S}$ не инвариантно относительно T^k, то $T^k S$ будет отличным от $\tilde{S}$. Нетрудно видеть, что по построению $T^k S$ инвариантно относительно T^k-действия.

Естественно назвать процесс $\tilde{S} \mapsto T^k S$ *перестройкой* лагранжева подмногообразия $\tilde{S}$; у перестроек имеются параметры — наборы значений c_i для первых интегралов, в зависимости от которых для одного и того же $\tilde{S}$ в результате перестройки могут получаться разные топологические типы лагранжевых подмногообразий.

В конструкции Миронова для векторного $\mathbb{C}^n$ и проективного $\mathbb{CP}^n$ комплексных пространств в качестве исходного лагранжева подмногообразия $\tilde{S}$ используется универсальное для этих случаев подмногообразие, являющееся вещественной частью всего алгебраического многообразия по действию стандартной антиголоморфной инволюции. В самом деле, в согласованной с кэлеровой формой системе координат $(Z_1, \ldots, Z_n)$ для $\mathbb{C}^n$ или $[z_0 : \ldots : z_n]$ для $\mathbb{CP}^n$ зададим инволюцию как покоординатное комплексное сопряжение; вещественные части $(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{CP}^n)_{\mathbb{R}} = \mathbb{RP}^n$ являются лагранжевыми подмногообразиями в соответствующих пространствах. Таким образом, если алгебраическое многообразие X допускает существование антиголоморфной инволюции такой, что вещественная часть $X_{\mathbb{R}} \subset X$ имеет максимально возможную размерность, то мы всегда имеем выделенное лагранжево подмногообразие $\tilde{S} = X_{\mathbb{R}}$, которое в общем случае трансверсально торическому действию, применяя к которому перестройки по действию торов $T^1, T^2, \ldots, T^k$, получим огромный набор новых лагранжевых подмногообразий. Мы называем полученные такими перестройками лагранжевы подмногообразия *циклами Миронова*, поскольку они являются прямыми обобщениями примеров, построенных в [8].

При этом необходимо отметить, что класс алгебраических многообразий, допускающих антиголоморфные инволюции подходящего типа, очень широк: туда входят проективные пространства, многообразия Грассмана, полные и частичные многообразия флагов и многие другие. Более того, алгебраическое многообразие может допускать разные антиголоморфные структуры с топологически неэквивалентными вещественными частями. Например, комплексная квадрика $Q_{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ в качестве вещественной части допускает не только сферу S^{n-1}, но любое из многообразий вида $(S^k \times S^{n-k-1})/\mathbb{Z}_2$, где S^i есть i-мерная сфера, и прямое произведение факторизуется по одновременной антиподальной инволюции. Таким образом, обобщение конструкции Миронова дает множество примеров лагранжевых подмногообразий.

Пошаговая конструкция в общем случае такова: в присутствии неполного набора первых интегралов $f_1, \ldots, f_k$ на алгебраическом многообразии X с антиголоморфной инволюцией $\sigma : X \to X$, так что вещественная часть $X_{\mathbb{R}}$ имеет вещественную размерность $\dim_{\mathbb{R}} X_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} X$, рассмотрим общий набор значений $c_1, \ldots, c_k$ первых интегралов и пересечение $S_{\mathbb{R}}(c_1, \ldots, c_k) = X_{\mathbb{R}} \cap N(c_i)$ с общим множеством уровня

$N_{c_i} = \{f_1 = c_1, \ldots, f_k = c_k\}$. Тогда, применяя торическое действие T^k, индуцируемое гамильтоновым действием X_{f_i}, к последнему подмногообразию, получаем новое n-мерное подмногообразие $T^k(S_{\mathbb{R}}(c_1, \ldots, c_n)) \subset X$ (возможно, с самопересечениями). В работе [9] доказывается, что $T^k(S_{\mathbb{R}}(c_1, \ldots, c_k))$ есть лагранжева иммерсия (в гладком случае — лагранжево вложение) в объемлющее алгебраическое многообразие X.

В одном и том же случае можно рассматривать не все f_i, выбирая любой поднабор, индуцирующий действие T^l с $l < k$, и, снова применяя нашу схему, мы получаем набор лагранжевых подмногообразий разных степеней однородности. Например, в случае многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}\,(1,3)$, уже рассматривавшегося выше, имеем степени однородности $0, 1, 2$ и 3. Нулевая степень однородности соответствует просто вещественной части $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,3)$, которая для реализации квадрикой $Q_4 = \{w_0 w_1 - w_2 w_3 + w_4 w_5 = 0\}$ соответствует $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$; максимальная степень однородности дает лагранжев тор $T^4 \subset Q_4$. В работе [9] предъявлены частные ответы и для промежуточных степеней однородности, а поскольку все топологические типы для разных степеней однородности оказываются различными, высказывается гипотеза о том, что многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}\,(1,n)$ прямых в проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ допускает как минимум n топологически различных лагранжевых подмногообразий.

Произвольное многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}\,(k,n)$ также является примером алгебраического многообразия с действием тора T^n и подходящей антиголоморфной структурой: как пространство k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{CP}^n$ оно наследует действие тора T^n (а значит, и любого подтора T^l) и при этом допускает естественную антиголоморфную инволюцию, наследуемую от антиголоморфной инволюции на проективном пространстве (каждое k-мерное подпространство при комплексном сопряжении объемлющего $\mathbb{CP}^n$ переходит в k-мерное проективное подпространство, и если это подпространство совпадает с исходным, то исходное является вещественным). Соответствующая вещественная часть $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n)$ есть пересечение образа $\mathrm{Gr}\,(k,n)$ при вложении Плюккера в $\mathbb{CP}^N$ с вещественной частью $\mathbb{RP}^N$ последнего.

В работе [10] были построены первые примеры лагранжевых циклов Миронова степени однородности 1 в $\mathrm{Gr}(k,n)$. Главный результат состоит в следующем: цикл Миронова реализуется гладким лагранжевым многообразием, изоморфным топологически нетривиальному расслоению над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n-1)$ со слоем $S^1 \times S^{k-1}$ в случае четного k или со слоем, изоморфным обобщенной бутылке Клейна, в случае нечетного k. В частности для $\mathrm{Gr}\,(1,n)$ при любом n конструкция дает топологически нетривиальное T^2-расслоение над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,n-1)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00164) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В., Гивенталь А.* Симплектическая геометрия // Итоги науки и техн. Сер. «Соврем. проблемы. мат. фундам. направления». 1985. Т. 4. С. 5–135.
2. *Griffits P., Harris J.* Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley, 1978.
3. *Chekanov Yu.* Lagrangian Tori in a Symplectic Vector Space and Global Symplectomorphisms // Math. Z. 1996. V. 223, No. 4. P. 547–559.

4. *Delzant T.* Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment // Bull. Soc. Math. France. 1988. V. 116, No. 3. P. 315–339.
5. *Тюрин Н.* Псевдоторические структуры: лагранжевы подмногообразия и лагранжевы слоения // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72, № 3. С. 513–546.
6. *Тюрин Н.* Монотонные лагранжевы торы стандартного и нестандартного типов в торических и псевдоторических многообразиях Фано // Тр. МИ РАН им. В. А. Стеклова. 2019. Т. 307. С. 267–280.
7. *Нехорошев Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 181–198.
8. *Миронов А.* Новые примеры гамильтоново минимальных и минимальных лагранжевых многообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 85–96.
9. *Тюрин Н.* Лагранжевы циклы Миронова в алгебраических многообразиях // Мат. сб. 2021. Т. 212, № 3. С. 389–398.
10. *Тюрин Н.* Примеры циклов Миронова в многообразиях Грассмана // Сибирский мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 457–465.

Получено 24 февраля 2022 г.