Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 2(247). С. 200–208

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ

О ТРАЕКТОРИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЛЕЖАЩИХ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Э. А. Айрян [а,б], *М. М. Гамбарян* [в], *М. Д. Малых* [а,в,1], *Л. А. Севастьянов* [а,в]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

[в] Российский университет дружбы народов, Москва

Теория интегрирования динамических систем, созданная Лагутинским, переформулирована для произвольных линейных систем гиперповерхностей. Рассмотрены следующие задачи. Даны некоторая динамическая система и некоторая линейная система алгебраических гиперповерхностей. Требуется выяснить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы. В случае утвердительного ответа требуется: 1) составить уравнение этой гиперповерхности, 2) доказать существование интеграла движения и выписать для него явное выражение. Построен пример, показывающий, что гиперповерхности исходной линейной системы и линии уровня интеграла могут не совпадать.

The theory of integration of dynamic systems created by Lagutinski is reformulated for arbitrary linear systems of hypersurfaces. The following problems are considered. Some dymanic system and some linear system of algebraic hypersurfaces are given. It is necessary to find out whether any integral curve lies on one of the hypersurfaces of a linear system. In the case of an affirmative answer, it is required to 1) compose an equation of this hypersurface, 2) prove the existance of an integral of motion and write an explicit expression for it. An example has been built showing that the hypersurfaces of the original linear system and the integral level lines can be distinguished.

PACS: 02.30.Ik

ВВЕДЕНИЕ

Если динамическая система обладает алгебраическим интегралом движения, то всякое ее решение лежит на некоторой алгебраической гиперповерхности. Эта гиперповерхность «соткана» из частных решений динамической системы, т. е. является ее интегральным многообразием. Обратное утверждение требует некоторых существенных оговорок, поскольку из того, что одно решение лежит на некоторой алгебраической гиперповерхности, не следует, что эта гиперповерхность интегральная.

В 1910-х гг. разработка алгоритма отыскания алгебраических интегралов динамических систем привела М. Н. Лагутинского [1, 2] к исследованию алгебраических гиперповерхностей, на которых лежат решения. Доказанное в [2] можно сформулиро-

[1] E-mail: mmalykh@jinr.ru

вать так: если каждое решение динамической системы лежит на некоторой гиперповерхности, порядок которой не превосходит некоторого числа m, то система имеет и алгебраический интеграл. В центре внимания оказались формулы для отыскания этого интеграла, вопросу же о связи между этими гиперповерхностями и линиями уровня интеграла не было уделено должного внимания. По формулам Лагутинского получается, что интеграл является отношением двух многочленов, степень которых выше m, а примеры учат, что числитель и знаменатель всякий раз имеют общие множители, после сокращения на которые получаются многочлены степени m [3].

Для случая динамической системы размерности 2 результаты Лагутинского были переоткрыты в 2007 г. группой авторов, занимающихся разработкой алгоритмов символьного интегрирования [4], связь этих результатов с работами Лагутинского была отмечена в [5]. Для двумерного случая удается доказать более сильное утверждение: если каждое решение динамической системы лежит на некоторой линии, порядок которой не превосходит некоторого числа m, то эта линия — линия уровня алгебраического интеграла системы [4]. Поскольку по ходу доказательства используются специфические свойства двумерной задачи, перенести его прямо на многомерный случай невозможно.

Гиперповерхности, порядок которых не превосходит некоторого числа m, образуют линейную систему. Поэтому можно сказать, что Лагутинский рассматривал случай, когда интегральные кривые динамической системы лежат на некоторых гиперповерхностях этой линейной системы. Однако если забыть об обозначениях, введенных в [2, § 4], можно подумать, что он рассматривал произвольные линейные системы, на что мы обратили внимание в [6]. Разумеется, Лагутинский интересовался предельным переходом $m \to \infty$, который сулил открытие алгоритма, позволяющего за конечное число шагов найти все рациональные интегралы заданной динамической системы. Однако сейчас, после стольких лет безуспешных попыток отыскания такого алгоритма [7], куда более интересной представляется возможность изложения теории Лагутинского в связи с любым заданным линейным семейством.

Мы полагаем, что задачи теории Лагутинского следует сформулировать следующим образом. Даны некоторая динамическая система и некоторая линейная система алгебраических гиперповерхностей. Требуется выяснить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы. В случае утвердительного ответа требуется: 1) составить уравнение этой гиперповерхности, 2) доказать существование интеграла движения, выписать для него явное выражение, 3) сравнить гиперповерхности и линии уровня интеграла.

Следует подчеркнуть, что в целом доказательства из [2] переносятся на случай произвольных линейных систем без затруднений и служат необходимой подготовкой для проведения итогового сравнения. При этом мы обходим «сомнительные случаи» [2, § 9]. Нам представляется, что введение понятия вырожденной линейной системы позволяет изложить этот вопрос несколько короче.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ЛАГУТИНСКОГО

Пусть дана динамическая система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

или, для краткости,

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}),$$

здесь правые части являются рациональными функциями с рациональными коэффициентами.

Пусть даны многочлены $g_0, \ldots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, линейно независимые над $\mathbb{C}$. Множество всех гиперповерхностей имеет вид

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_i(\mathfrak{x}) = 0, \tag{2}$$

где $a_0, \ldots, a_m$ — числовые параметры из $\mathbb{C}$, среди которых хотя бы один отличен от нуля. Их называют линейной системой размерности m, линейная система размерности 1 называется пучком, линейная система размерности 2 называется сетью [8].

Найдем сначала необходимое условие для того, чтобы всякое решение попадало на гиперповерхность линейной системы. Допустим, что для произвольного решения $\mathfrak{x}(t)$ системы (1) выполнено

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_i(\mathfrak{x}(t)) = 0, \tag{3}$$

при надлежащем выборе констант $a_0, \ldots, a_m$. Дифференцируя (3) по t последовательно m раз, мы, с учетом исходной системы (1), получим

$$\sum_{i=0}^{m} a_i D^j g_i(\mathfrak{x}) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Поэтому в решении определитель

$$\det \begin{pmatrix} g_0 & \ldots & g_m \\ Dg_0 & \ldots & Dg_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^m g_0 & \ldots & D^m g_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

равен нулю. В силу того, что какая-нибудь интегральная кривая проходит через любую точку пространства $\mathbb{C}^n$, этот определитель равен нулю тождественно. Его будем называть *определителем Лагутинского линейной системы* (2).

Обратно допустим, что определитель Лагутинского заданной линейной системы равен нулю. Тогда на любом решении $\mathfrak{x}(t)$ определитель

$$\det \begin{pmatrix} g_0(\mathfrak{x}(t)) & \ldots & g_m(\mathfrak{x}(t)) \\ \dfrac{dg_0(\mathfrak{x}(t))}{dt} & \ldots & \dfrac{dg_m(\mathfrak{x}(t))}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{d^m g_0(\mathfrak{x}(t))}{dt^m} & \ldots & \dfrac{d^m g_m(\mathfrak{x}(t))}{dt^m} \end{pmatrix}$$

равен нулю. Это — определитель Вронского для $g_0(\mathfrak{x}(t)), \dots, g_m(\mathfrak{x}(t))$. Поэтому эти функции линейно зависимы, т. е. найдутся такие нетривиальные константы $a_0, \dots, a_m$, что будет выполняться (3). Иными словами, решение $\mathfrak{x}(t)$ лежит на гиперповерхности рассматриваемой линейной системы. Тем самым мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. Всякая траектория динамической системы (1) лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы (2) в том и только в том случае, когда ее определитель Лагутинского (4) равен нулю.

Представленное доказательство принадлежит Лагутинскому [2, § 5]. Эта теорема позволяет легко проверить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы. Вычисление определителей Лагутинского в системах компьютерной алгебры не представляет никаких трудностей [3, 9, 10].

2. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть определитель Лагутинского линейной системы равен нулю. Теорема 1 не дает конструктивного способа отыскания уравнения гиперповерхности, о существовании которой она утверждает. Однако обычно это уравнение легко отыскать следующим образом.

Пусть $\mathfrak{x}_0$ — точка пространства $\mathbb{C}^n$, в силу теоремы Коши из нее выходит одна единственная интегральная кривая, скажем, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$. Будем по умолчанию считать, что $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}_0$. Если эта интегральная кривая лежит на гиперповерхности $h(\mathfrak{x}) = 0$, то производные всех порядков от $h(\mathfrak{x}(t))$ равны нулю при всех значениях t, в том числе при $t = 0$. Поэтому $D^k h(\mathfrak{x}_0) = 0$. Вообще говоря, m условий

$$h(\mathfrak{x}_0) = 0, \dots, D^{m-1}h(\mathfrak{x}_0) = 0 \tag{5}$$

достаточно для выделения единственной гиперповерхности из линейной системы размерности m. Поэтому нетрудно выписать явно ее уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} g_0(\mathfrak{x}_0) & \dots & g_m(\mathfrak{x}_0) \\ Dg_0(\mathfrak{x}_0) & \dots & Dg_m(\mathfrak{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{m-1}g_0(\mathfrak{x}_0) & \dots & D^{m-1}g_m(\mathfrak{x}_0) \\ g_0(\mathfrak{x}) & \dots & g_m(\mathfrak{x}) \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Условимся для краткости левую часть этого уравнения обозначать как $h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x})$.

Следует заметить, что возможен и вырожденный случай, когда условия (5) выделяют бесконечно много гиперповерхностей, а левая часть (6) равна нулю.

Определение 1. Линейную систему (2) будем называть невырожденной относительно интегральных кривых динамической системы, если имеется одна-единственная гиперповерхность h линейной системы, которая проходит через точку $\mathfrak{x}_0$ общего положения в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет в ней условию (5).

Замечание. Условия (5) означают, что в окрестности $t = 0$

$$h(\mathfrak{x}(t)) = o(t^{m-1}),$$

т. е. интегральная кривая, проходящая через $\mathfrak{x}_0$, касается гиперповерхности с кратностью $m-1$ или, как описывали это авторы [11], гиперповерхность проходит через $\mathfrak{x}_0$ и следующие за ней $(m-1)$ бесконечно близкие точки на интегральной кривой.

Покажем, что далее можно ограничиться рассмотрением невырожденных линейных систем.

Теорема 2. Всякая вырожденная линейная система содержит невырожденную подсистему, определитель Лагутинского которой равен нулю.

Доказательство. Линейная система (2) будет вырожденной тогда и только тогда, когда все миноры m-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_m \\ Dg_0 & \dots & Dg_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{m-1}g_0 & \dots & D^{m-1}g_m \end{pmatrix}$$

будут тождественно равны нулю. В таком случае линейная система

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i g_i(\mathfrak{x}) = 0$$

имеет нулевой определитель Лагутинского. Если она опять вырожденная, то

$$\sum_{i=0}^{m-2} a_i g_i(\mathfrak{x}) = 0$$

имеет нулевой определитель Лагутинского и т. д. Таким путем мы придем или к невырожденной линейной системе с нулевым определителем Лагутинского, или к тому, что выражение g_0 тождественно равно нулю, что невозможно.

3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ ЛАГУТИНСКОГО

Пусть линейная система (2) не вырождена и ее определитель Лагутинского равен нулю. Тогда интегральная кривая, проходящая через точку $\mathfrak{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, лежит на гиперповерхности

$$h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}) = 0,$$

принадлежащей этой линейной системе. Напомним, что $h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x})$ — это определитель, стоящий слева в (6). Появление второго аргумента наводит на мысль о том, что гиперповерхности

$$h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = 0$$

будут играть в дальнейшем важную роль.

Теорема 3. Если линейная система (2) не вырождена и ее определитель Лагутинского равен нулю, то динамическая система допускает рациональный интеграл

$$\frac{h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0)}{h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1)}, \tag{7}$$

где $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$ — точки общего положения в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Поскольку определитель Лагутинского равен нулю, тождество Лагутинского [6, лемма 2] дает

$$h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1)\, D_{\mathfrak{x}} h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0) = h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0)\, D_{\mathfrak{x}} h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1).$$

Поэтому

$$D_{\mathfrak{x}} \frac{h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0)}{h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1)} = 0,$$

и выражение (7) является или интегралом динамической системы, или константой.

Допустим, что верно второе, тогда $h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0)$ и $h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1)$ линейно зависимы: найдутся такие нетривиальные функции $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, скажем, α и β, что

$$\alpha(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}_1)\, h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_0) + \beta(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}_1)\, h(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1) = 0$$

при всех $\mathfrak{x}$. Поскольку рассматриваемая линейная система не вырождена, уравнение

$$h(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}) = 0$$

задает гиперповерхность линейной системы (2), проходящую через интегральную кривую, выходящую из точки $\mathfrak{x}_0$. Поэтому

$$h(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}_0) = 0.$$

Точка общего положения $\mathfrak{x}_1$ не лежит на этой гиперповерхности, поэтому

$$h(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}_1) \neq 0.$$

Следовательно, при $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ мы имеем $\beta = 0$. Меняя $\mathfrak{x}_0$ и $\mathfrak{x}_1$ ролями, получим $\alpha = 0$, что невозможно.

Замечание. Теорема 3 является вариацией на тему основной теоремы теории определителей Лагутинского. Наше доказательство следует исходной идее Лагутинского и опирается на его тождество. Другой способ предложен Виторио Перейрой и описан в [4, теорема 5.3] для частного случая, когда $n = 2$, а $\{g_i\}$ — множество всех мономов, степень которых меньше некоторого заданного числа N. Однако он без труда переносится на общий случай.

Из теорем 1, 2 и 3 нетрудно вывести следующее заключение: если всякая траектория динамической системы (1) лежит на некоторой гиперповерхности линейной системы (2), то динамическая система допускает рациональный интеграл.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Теоремы 1 и 3 оказываются двойственными. Если линейная система (2) не вырождена и ее определитель Лагутинского равен нулю, то решение $\mathfrak{x}(t)$ динамической системы попадает и на гиперповерхность

$$h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}) = 0, \tag{8}$$

принадлежащую рассматриваемой линейной системе (2), и на гиперповерхность

$$h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = 0, \tag{9}$$

принадлежащую некоторому линейному пучку.

Напомним, что гиперповерхность $s(\mathfrak{x}) = 0$ называется интегральной (или вторым интегралом, многочленом Дарбу и т. п. [12]), если всякое решение динамической системы (1), пересекающее эту гиперповерхность, лежит на ней при всех t. Относительно гиперповерхности (8) нам известно лишь то, что на ней лежит одна траектория, а именно, та, которая проходит через точку $\mathfrak{x}_0$. Поэтому мы не можем утверждать, что гиперповерхность (8) является интегральной. Напротив, гиперповерхность (8) является линией уровня интеграла динамической системы, и поэтому она интегральная.

В плоском случае ($n = 2$), рассмотренном в [4, теорема 5.3], получается, что интегральная кривая $\mathfrak{x}(t)$ должна лежать одновременно на двух кривых:

$$h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}) = 0$$

и

$$h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = 0,$$

а поэтому и на некоторой неприводимой компоненте, принадлежащей обеим этим кривым. Эта кривая будет интегральной как компонента линии уровня интеграла. Поэтому в этом случае и нет никакой необходимости в исследовании линейных систем, отличных от линейных пучков интегральных кривых.

Замечание. Смешению теорем 1 и 3 в еще большей степени способствовало то обстоятельство, что в частном случае, который рассматривается обычно, траектории лежат на интегральных кривых, формирующих линейный пучок, входящий в исходную линейную систему. Дело в том, что в силу второй теоремы Бертини [8] кривая общего положения в пучке может быть составной только в том случае, когда она состоит из нескольких неприводимых кривых, принадлежащих одному и тому же пучку. Если предположить, как в [4, теорема 5.3], что исходная линейная система образована всеми кривыми, порядок которых не превосходит заданного числа N, то кривые нового пучка будут принадлежать исходной линейной системе.

Однако нам не удалось обобщить это размышление на трехмерный случай. Дело в том, что тогда интегральная кривая $\mathfrak{x}(t)$ должна лежать одновременно на двух поверхностях:

$$h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}) = 0$$

и

$$h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = 0,$$

из которых лишь про вторую известно, что она интегральная. Из этого не следует, что они должны иметь общую компоненту, и поэтому первая поверхность имеет интегральную компоненту.

Пример 1. Рассмотрим простейшую динамическую систему в $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 1.$$

Траекториями будут прямые, параллельные оси Oz. Возьмем какую-нибудь прямую L, отличную от них (скажем, $x = y = z$), и рассмотрим линейную систему поверхностей второго порядка, проходящих через прямую L. Из общих соображений ясно, что в этом семействе имеются линейчатые поверхности [13, гл. 6], которые проходят через L и еще одну прямую $x = a$, $y = b$, но не через другие траектории.

Для явного построения линейного семейства нужно наложить на линейную систему всех поверхностей второго порядка три базовые точки, лежащие на L. Это семейство задается многочленами $g_0, \ldots, g_m$:

$$\left\{-2\,x^2 + 2\,xy, -x^2 + y^2, -2\,x^2 + 2\,xz, -2\,x^2 + 2\,yz, -x^2 + z^2, -x + y, -x + z\right\}.$$

Это семейство вырожденное, поскольку третья производная от любого элемента равна нулю.

Возьмем наудачу подсистему

$$a_0(y - x) + a_1(z - x) + a_2(-x^2 + y^2 - 2x^2 + 2xz - 2x^2 + 2yz) = 0.$$

Это — невырожденная система, определитель Лагутинского которой равен нулю. В силу теоремы 1 всякая траектория лежит на некоторой ее поверхности, например, прямая $x = 8$, $y = 3$ лежит на поверхности

$$-5x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 49x - 27y - 22z = 0,$$

что нетрудно вычислить по формуле (6). Эта поверхность пересекает траекторию $x = y = 0$ только в одной точке $z = 0$ и поэтому не является интегральной. Более того, левая часть является неприводимым многочленом кольца $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанные теоремы позволяют ответить на поставленные в начале этой статьи вопросы. Пусть даны некоторая динамическая система и некоторая линейная система алгебраических гиперповерхностей. Чтобы выяснить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы, следует выяснить, равен нулю определитель Лагутинского этой линейной системы или нет (теорема 1).

Если линейная система не является вырожденной (определение 1), то в ней имеется единственная гиперповерхность, на которой лежит интегральная кривая динамической системы, проходящая через заданную точку $\mathfrak{x}_0$ общего положения в $\mathbb{C}^n$. Эта гиперповерхность описывается уравнением (6), которое для краткости было записано выше как

$$h(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}) = 0.$$

При этом, согласно теореме 3, динамическая система имеет рациональный интеграл

$$\frac{h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)}{h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)} = C,$$

иными словами, интегральные кривые динамической системы лежат на интегральных гиперповерхностях линейного пучка

$$h(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) - Ch(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) = 0.$$

В двумерном случае этот пучок вложен в заданную линейную систему, однако уже в трехмерном случае это, вообще говоря, не так, как видно на примере 1.

Случай вырожденной линейной системы может быть сведен к невырожденному в силу теоремы 2.

Благодарности. Авторы признательны участникам научного семинара ЛИТ ОИЯИ, и в особенности доценту Яну Буше, за ряд важных замечаний, позволивших существенно улучшить текст статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1911. Т. 12. С. 111–243.
2. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. Т. 13. С. 200–224.
3. *Malykh M. D., Sevastianov L. A., Yu Ying.* On Algebraic Integrals of a Differential Equation // Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. 2019. V. 27, No. 2. P. 105–123.
4. *Christopher C., Llibre J., Vitório Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific J. Math. 2007. V. 229, No. 1. P. 63–117.
5. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж.-М., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-матем. исслед. 2001. Т. 6. С. 111–127.
6. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М. Н. Лагутинского // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2016. Т. 5, № 24. С. 327–336.
7. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // J. Complexity. 2011. V. 27, No. 2. P. 246–262.
8. *Severi F.* Lezioni di geometria algebrica. Padova: Angelo Graghi, 1908.
9. *Малых М. Д., Ин Юй.* Методика отыскания алгебраических интегралов дифференциальных уравнений первого порядка // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. «Математика, информатика, физика». 2018. Т. 26, № 3. С. 285–291.
10. *Глазков С. А.* Алгоритмы решения дифференциальных уравнений в Math Partner // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. «Естественные и техн. науки». 2018. Т. 23, № 122. С. 250–260.
11. *Cremona L.* Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane // Opere mathematiche di Luigi Cremona. Milano: U. Hoepli, 1914. V. 1. P. 317–465.
12. *Goriely A.* Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems. Singapore; River Edge, NJ: World Sci., 2001.
13. *Enriques F.* Lezioni di gometria descrittiva. Bologna: Zanichelli, 1929.

Получено 22 сентября 2022 г.