Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 304–311

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КАНОНИЧЕСКАЯ БИГРАВИТАЦИЯ

В. О. Соловьев [1]

Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Протвино, Россия

Бигравитация является красивой модификацией общей теории относительности (ОТО), сохраняющей общую ковариантность и принцип эквивалентности. Сущность теории наилучшим образом раскрывается при построении ее гамильтонова формализма.

Bigravity appears as a nice modification of the General Relativity (GR) where both the general covariance and the equivalence principle are preserved. The structure of this theory is manifested in the best way when its Hamiltonian form is demonstrated.

PACS: 04.50.–Kd; 45.20.Jj; 47.10.Df

ВВЕДЕНИЕ

Динамика и калибровочные преобразования в ОТО перемешиваются между собой. Поэтому гамильтониан, порождающий переход с одной пространственноподобной гиперповерхности на другую, становится линейной комбинацией связей $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$, генерирующих преобразования координат. Множители Лагранжа при этих связях N, N^i называются функциями смещения и сдвига и имеют наглядный геометрический смысл. N определяет скорость изменения расстояния между гиперповерхностями, а N^i — скорость касательного сдвига точки вдоль гиперповерхности. Обозначим координаты пространства-времени X^α, а координаты на гиперповерхности — x^i. Соответственно, при движении гиперповерхности за «время» $d\tau$ каждая ее точка «перемещается» на $N^\alpha d\tau$. Используем базис из трех касательных к гиперповерхности векторов e_i^α и единичной нормали n^α, индуцированную на гиперповерхности метрику обозначим как γ_{ij},

$$N^\alpha d\tau \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial \tau} d\tau = N n^\alpha d\tau + N^i e_i^\alpha d\tau, \quad e_i^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}, \tag{1}$$

$$\gamma_{ij} = g_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \quad g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1, \quad g_{\alpha\beta} n^\alpha e_i^\beta = 0. \tag{2}$$

За канонические переменные в ОТО выбираем 6 компонент γ_{ij} и сопряженные им импульсы π^{ij}. Связи $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$, полученные варьированием по N, N^i, оказываются первого рода, их скобки Пуассона снова выражаются через эти связи. Число гравитационных степеней свободы, подсчитанное по известной формуле,

$$\mathrm{DOF} = n - n_{\mathrm{f.c}} - \frac{1}{2} n_{\mathrm{s.c}}, \tag{3}$$

оказывается равным двум: $6[\gamma_{ij}] - 4[\mathcal{H}, \mathcal{H}_i] = 2$.

[1] E-mail: Vladimir.Soloviev@ihep.ru

В бигравитации [1, 2] мы уже имеем дело с двумя копиями ОТО, т.е. с двумя метриками пространства-времени $g_{\mu\nu}$, $f_{\alpha\beta}$, минимально взаимодействующими соответственно с двумя видами полей материи ϕ_A, ψ_B. Для простоты здесь оставим только один вид материи ϕ_A. Кроме того, метрики взаимодействуют через потенциал, построенный из инвариантов тензора их свертки $g^{-1}f \equiv g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}$. Лагранжиан бигравитации имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - \sqrt{-g}U(g^{-1}f), \qquad U = \frac{2m^2}{\kappa}F(g^{-1}f), \tag{4}$$

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{1}{\kappa^{(f)}}\sqrt{-f}f^{\mu\nu}R^{(f)}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}^{(g)} = \frac{1}{\kappa^{(g)}}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R^{(g)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(g)}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}). \tag{5}$$

Гамильтонов формализм бигравитации имеет смысл только в том случае, когда на пространстве-времени существуют однопараметрические семейства гиперповерхностей, пространственноподобных по отношению к обеим метрикам, такие, что векторное поле N^α будет времениподобным для обеих метрик.

Если на потенциал взаимодействия двух метрик в бигравитации будет наложено только требование общей ковариантности, то теория бигравитации будет кроме 2 степеней свободы для безмассового поля и 5 для массивного содержать лишнюю степень свободы, которая к тому же будет давать отрицательный вклад в кинетическую энергию [3]. В работах [4] был найден специальный вид потенциала, для которого этот недостаток не имеет места, названный потенциалом дРГТ:

$$U_{\mathrm{dRGT}} = \frac{2m^2}{\kappa}\sum_{i=0}^{i=4}\beta_i \mathrm{e}_i(\mathsf{X}), \qquad \mathsf{X}^\mu_\nu = \sqrt{||g^{-1}f||}^\mu_\nu. \tag{6}$$

Потенциал дРГТ строится из симметрических полиномов e_i матрицы X. Именно такая матрица оказывается линейной по вспомогательной переменной u, что делает эту переменную множителем Лагранжа и приводит к появлению в теории новой связи $\mathcal{S}$, которая не возникает ни в одном другом потенциале. Переменная u появляется как отношение двух функций смещения, отвечающих двум метрикам пространства-времени, аналогично возникают три переменные, образующие вектор u^i,

$$u = \frac{\bar{N}}{N}, \qquad u^i = \frac{\bar{N}^i - N^i}{N}, \tag{7}$$

но от них потенциал зависит нелинейно, они не приводят к новым связям.

Главная проблема канонического формализма бигравитации — отсутствие явной формулы, выражающей потенциал взаимодействия двух метрик через канонические переменные. Существуют пути обхода этой трудности. Извлечь корень из матрицы

$$\mathsf{Y} = g^{-1}f = u^{-2}\begin{pmatrix} -[n^\mu n_\nu] & u^i[n^\mu e_{\nu i}] \\ u^j[e^\mu_j n_\nu] & \left(-u^i u^j + u^2\gamma^{ij}\right)[e^\mu_i e_{\nu j}] \end{pmatrix} \tag{8}$$

можно следующими способами: упрощением геометродинамики до динамики на минисуперпространстве, применением неявных функций, использованием тетрадных переменных.

1. МИНИ-СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Можно наглядно проиллюстрировать канонический формализм бигравитации на примере однородных изотропных пространственно-плоских космологических моделей [5]. Пусть обе метрики будут диагональными:

$$f_{\mu\nu} = (-N^2(t), {R_f}^2(t)\delta_{ij}), \qquad g_{\mu\nu} = (-\bar{N}^2(t), {R_g}^2(t)\delta_{ij}), \tag{9}$$

тогда диагональной оказывается и метрика их свертки, из которой в этом случае легко извлечь квадратный корень (здесь $r = R_f/R_g$):

$$\mathsf{Y}^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} = \mathrm{diag}\left(u^{-2}, r^2\delta_{ij}\right), \qquad \mathsf{X} = \sqrt{Y} = \mathrm{diag}\left(u^{-1}, r\delta_{ij}\right). \tag{10}$$

Собственные значения λ_i матрицы X и симметрические полиномы e_i тогда легко вычислить, и потенциал бигравитации принимает простой полиномиальный вид [6]

$$U = \frac{2m^2}{\kappa} N R_g^3 \left(u B_0(r) + B_1(r)\right), \qquad B_i(r) = \beta_i + 3\beta_{i+1} r + 3\beta_{i+2} r^2 + \beta_{i+3} r^3. \tag{11}$$

Поскольку в этом случае все переменные зависят только от времени, в теории возникают только две первичные связи, при варьировании по N получаем связь первого рода $\mathcal{R}$, а при варьировании по u связь второго рода $\mathcal{S}$. Их можно записать в виде двух уравнений Фридмана:

$$H_g^2 = \frac{\kappa}{6}\rho + \frac{m^2}{3} B_0(r), \qquad H_f^2 = \frac{m^2}{3}\frac{B_1(r)}{r^3}\frac{\kappa_f}{\kappa}. \tag{12}$$

Вычисляя скобку Пуассона $\mathcal{S}$ с гамильтонианом, находим вторичную связь

$$\Omega \equiv \frac{4m^2 R_g^3}{\kappa} \left(H_g - r H_f\right) B_0'(r) = 0, \tag{13}$$

ее скобка Пуассона со связью $\mathcal{S}$ отлична от нуля. Условие согласования связи Ω с динамикой позволяет найти u, множитель Лагранжа, стоящий при связи $\mathcal{S}$. В качестве полей материи для иллюстрации можно рассмотреть однородное в пространстве скалярное поле или однородную идеальную жидкость. Наличие в потенциале дРГТ произвольных коэффициентов позволяет строить разные космологические сценарии. Наиболее интересно появление в уравнениях (12) зависящих от времени полей темной энергии.

2. МЕТОД НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. I

Первое построение гамильтонова формализма бигравитации [2, 7], предложенное в 2011 г., состояло в явном выделении переменных типа u, u^i и в замене переменных

$$u^i = v^i + u D^i{}_j v^j, \qquad \varepsilon^{-1} = \sqrt{1 - \eta_{ij} v^i v^j}, \tag{14}$$

где вводилась неявная матричная 3×3 функция D^{ij}, содержащая в себе всю зависимость 4×4 матрицы $\mathsf{X} = \sqrt{\mathsf{Y}}$ от канонических переменных γ_{ij}, η_{ij}. После такой подстановки оказывается возможным извлечь квадратный корень из матрицы Y, заданной (8),

$$\mathsf{X} = \sqrt{\mathsf{Y}} = \varepsilon u^{-1} \begin{pmatrix} -[n^\mu n_\nu] & v^i[n^\mu e_{\nu i}] \\ v^j[e^\mu_j n_\nu] & \left(-v^i v^j + \varepsilon^{-2} u D^{ij}\right)[e^\mu_i e_{\nu j}] \end{pmatrix}, \tag{15}$$

при наложении двух условий на матрицу D^i_j:

$$D^{ij} = D^{ji}, \qquad \gamma^{ij} = D^i{}_k v^k D^j{}_m v^m + \varepsilon^{-2} D^{ik} D_k{}^j. \tag{16}$$

Таким образом, в этом подходе используется неявная матричная функция $D^i{}_j = D^i{}_j(v^m, \gamma_{mn}, \eta_{mn})$, индексы матрицы $D^i{}_j$ поднимаются и опускаются с помощью η_{ij}, η^{ij}. Симметрические полиномы матрицы $\mathsf{X} = \sqrt{\mathsf{Y}}$ выражаются через следы степеней этой матрицы и содержат зависимость от неявно заданной уравнениями (16) матрицы D^i_j. Однако вычисления производных от этих выражений по каноническим переменным, необходимые для расчетов со скобками Пуассона связей, были проведены лишь спустя 7 лет после первых эвристических выводов [12].

Линейность потенциала дРГТ по переменной типа u приводит к новой связи $\mathcal{S}$, а согласование этой связи с гамильтоновой динамикой дает вторичную связь Ω, при этом $\{\mathcal{S}, \Omega\} \neq 0$, следовательно, это связи второго рода. Кроме этого в теории имеется 4 связи первого рода, порождающих преобразования координат. Применяя общую формулу для числа гравитационных степеней свободы (3), получаем в результате 7, соответствующее 2 степеням свободы безмассового поля спина 2 и 5 степеням свободы массивного поля спина 2, число канонических координат γ_{ij}, η_{ij} равняется 12.

3. МЕТОД НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. II

Второй подход, в котором использовались неявные функции, был развит в 2012–2013 гг. [9,10]. Его особенность состояла в том, что за неявную функцию был принят сам потенциал взаимодействия двух метрик, при этом не требовалось никакой замены переменных. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \int \left(N\mathcal{R} + N^i \mathcal{R}_i + N\tilde{U} \right) d^3x, \qquad \tilde{U} = \sqrt{\eta}\, U(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij}). \tag{17}$$

Тогда, варьируя по N, N^i, получаем 4 уравнения:

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i \bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} = 0, \qquad \mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0, \tag{18}$$

при варьировании по переменным u, u^i получаем другие 4 уравнения

$$\mathcal{S} \equiv \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \qquad \mathcal{S}_i \equiv \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0. \tag{19}$$

Здесь $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$ — связи ОТО с метрикой $f_{\mu\nu}$, а $\bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{H}}_i$ — аналогичные выражения в ОТО с метрикой $g_{\mu\nu}$. Поскольку переменные N, N^i входят в гамильтониан линейно, уравнения (18) являются связями. Мы ожидаем, что эти связи будут генерировать деформации гиперповерхности и для них будет выполняться алгебра

$$\{\mathcal{R}(x), \mathcal{R}(y)\} = \eta^{ik}\mathcal{R}_k(x)\delta_{,i}(x,y) - (x \leftrightarrow y)\,, \tag{20}$$

$$\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}(y)\} = \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x,y)\delta(x,y), \tag{21}$$

$$\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}_j(y)\} = \mathcal{R}_j(x)\delta_{,i}(x,y) - \mathcal{R}_i(y)\delta_{,j}(y,x). \tag{22}$$

При вычислениях скобок Пуассона между выражениями $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_i$, содержащими неявную функцию $\tilde{U}$, появляются ее первые производные, и для реализации алгебры (20)–(22) требуется выполнение условий

$$2\eta_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\eta_{ij}} + 2\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{ij}} - u^i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = \delta^i_k\tilde{U}, \tag{23}$$

$$2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{k\ell}} - u^\ell u\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{k\ell} - u^2\gamma^{k\ell} - u^k u^\ell\right)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = 0. \tag{24}$$

Очевидно, переменные u, u^i не являются динамическими, но их роль отличается от роли N, N^i, поскольку гамильтониан (17) зависит от них нелинейным образом. Исключительная особенность потенциала дРГТ проявляется в том, что уравнения (19) оказываются для него функционально зависимыми, что означает выполнение условия $\partial^2\tilde{U}/\partial u^a\partial u^b(x) = 0$. Тогда появляется возможность выразить переменные u^i из трех уравнений и, подставив эти выражения в четвертое, получить равенство, которое уже не будет содержать ни одной из переменных $u^a = (u, u^i)$. Это уравнение и оказывается необходимой связью на канонические переменные γ_{ij}, η_{ij} и сопряженные им импульсы π^{ij}, Π^{ij}, а также, разумеется, на канонические переменные двух видов материи. Для исключения духа Бульвара–Дезера необходимо доказать существование двух связей второго рода. Это доказательство подробно изложено в работе [10], в нем используется метод построения общих решений однородного уравнения Монжа–Ампера [13]. Верны следующие формулы:

$$\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)\} = -\bar{U}^i\mathcal{S}(x)\delta_{,i}(x,y) + \bar{U}^i\mathcal{S}(y)\delta_{,i}(y,x), \tag{25}$$

$$\{\mathcal{R}(x), \mathcal{S}(y)\} = (u^i - u\bar{U}^i)\mathcal{S}(x)\delta_{,i}(x,y) - \left(u(\bar{U}^i\mathcal{S})_{,i} + \Omega\right)\delta(x,y), \tag{26}$$

$$\{\mathcal{S}(x), \Omega(y)\} \neq 0. \tag{27}$$

Здесь $\bar{U}^i$ выражается через вторые производные $\tilde{U}$ по u^a.

4. ТЕТРАДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Ниже мы принимаем для внутренних индексов $A, B, \ldots$ интервалы $0, 1, 2, 3$, а для $a, b, \ldots$ — $1, 2, 3$. Поскольку тетрады являются корнем из метрики

$$g = E^T E, \quad g_{\mu\nu} = E_{\mu A}E^A_\nu, \quad g^{-1} = E^{-1}(E^{-1})^T, \quad g^{\mu\nu} = E^\mu_A E^{A\nu}, \tag{28}$$

естественно надеяться, что их можно применить и к вычислению корня из свертки двух метрик в биграфитации:

$$\mathsf{X} = \sqrt{g^{-1}f} = \sqrt{E^{-1}(E^{-1})^T F^T F} = \sqrt{E^{-1}(FE^{-1})^T F} = E^{-1}F. \tag{29}$$

Этот план был намечен в работе [8]. Необходимо привлечь дополнительное условие, $(FE^{-1})^T = FE^{-1}$, названное условием симметричности тетрад. При его выполнении потенциал дРГТ можно явно выразить через канонические и вспомогательные переменные.

В ОТО особенности канонического тетрадного подхода состоят в увеличении числа переменных, которыми являются $(\mathbf{e}_{ai}, \pi^i_a)$ вместо (γ_{ij}, π^{ij}), и соответственно, в увеличении числа связей, наложенных на эти переменные. Так же как и в метрическом подходе, эти переменные описывают геометрию пространства, т. е. пространственно-подобной гиперповерхности. Если метрика трехмерного искривленного пространства задается при помощи 6 функций γ_{ij}, то, извлекая корень из этой метрики, мы получаем 9 компонент триадного базиса $\mathbf{e}_{ai}$ в каждой точке пространства. При этом работает калибровка: одна нога тетрады принимается совпадающей с единичной нормалью к гиперповерхности. Остальные 3 ноги оказываются касательными к гиперповерхности и образуют ортонормированную триаду $\mathbf{e}_{ai}$. Дополнительно возникает инвариантность при трехмерных вращениях триады, они генерируются тремя новыми связями первого рода. Таким образом, кроме 4 связей первого рода, отвечающих за общую координатную инвариантность, появляются еще 3, отвечающие за трехмерные вращения триадного базиса. Число физических степеней свободы остается прежним: $\mathrm{DOF} = 9 - (4+3) = 6 - 4 = 2$.

Для построения гамильтонова тетрадного формализма бигравитации проще воспользоваться формулами ОТО, удвоив число переменных, теперь это будет 21 пара канонически сопряженных величин $(\mathbf{e}_{ai}, \pi^i_a)$, $(\tilde{\mathbf{f}}_{ai}, \Pi^i_a)$, $(\tilde{v}_i, \Pi^i_0)$ и 8 множителей Лагранжа N, N^i, u, u^i. Здесь $\mathbf{e}_{ai} = E^a_\mu e^\mu_i$, $\tilde{\mathbf{f}}_{ai} = F^a_i$, $\tilde{v}^i = F^0_i$. Лагранжиан, содержащий потенциал взаимодействия, теперь инвариантен лишь при диагональных преобразованиях координат и вращениях базисов. В частности, мы можем ограничить калибровочную свободу одной из тетрад соотношением $E_{0\mu} = \bar{n}_\mu$. Здесь эта калибровка принята нами для $E_{\mu A}$, у второй тетрады все 4 ноги имеют ненулевые проекции на гиперповерхность
$$F_{A\mu} e^\mu_i = F_{Ai}, \tag{30}$$
поэтому количество ее независимых компонент будет на 3 больше. Обозначим их как $f_{0i} \equiv F_{0i}$. Параметризуем эту тетраду формулой
$$F^A_\mu = \Lambda^A{}_B \mathcal{F}^B_\mu, \tag{31}$$
где $\mathcal{F}^B_\mu$ обозначает вид второй тетрады в калибровке, принятой для первой тетрады,
$$\Lambda^A{}_B = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon v_b \\ \varepsilon v^a & \mathcal{P}^a_b \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^a_b = \delta^a{}_b + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+1} v^a v_b.$$

Разделив генераторы диагональных L^+_{ab} и недиагональных L^-_{ab} вращений триад $\mathbf{e}_{ai}, \mathbf{f}_{ai}$, мы получаем 3 связи первого рода с лагранжевыми множителями λ^+_{ab} и 3 связи второго рода с множителями λ^-_{ab}. Кроме того, еще 3 связи второго рода с множителями Лагранжа λ_a генерируют бусты для тетрады F^A_μ.

Итак, 17 первичных связей получаются варьированием гамильтониана по лагранжевым множителям $N, N^i, u, u^i, \lambda^+_{ab}, \lambda^-_{ab}, \lambda_a$. Проверяя эти первичные связи на согласованность с динамикой, находим 4 вторичные связи. Как уже говорилось, связей первого рода в тетрадном формализме бигравитации 7, остальные 14 связей относятся ко второму роду, таким образом, подсчет числа физических степеней свободы бигравитации дает нужный результат [11]

$$\mathrm{DOF} = n - n_{\mathrm{f.c}} - \frac{1}{2} n_{\mathrm{s.c}} = 21 - 7 - \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 = 2 + 5. \tag{32}$$

Интересно, что в число 10 вторичных связей входят 3 уравнения из 6 условий симметричности тетрад. Остальные 3 уравнения, относящиеся к этому условию, появляются при определении множителей Лагранжа u^i, они совпадают с преобразованием переменных (14), впервые предложенным в работах [2, 7].

Описанный в этом разделе метод основан на тетрадном формализме 2-го порядка. Ранее был построен формализм 1-го порядка [14, 15], в котором независимыми переменными считаются кроме тетрад и компоненты связности. В этом случае число переменных и число связей существенно возрастает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из рассмотренных здесь подходов к гамильтонову формализму бигравитации наиболее прямым и убедительным является тетрадный, не требующий дополнительных предположений о существовании и единственности каких-либо неявных функций, ни ${D^i}_j(v^i, \gamma_{ij}, \eta_{ij})$, ни $\tilde{U}(u, u^i, \gamma_{ij}, \eta_{ij})$.

Ревизия теории Эйнштейна больше не считается патологическим направлением, из-за таких новых вызовов, как проблемы темной энергии и темной материи, а также из-за никуда не девшейся старой проблемы неперенормируемости. Теория бигравитации является одной из возможных модификаций ОТО. В отличие от многих других вариантов она сохраняет такие черты ОТО, как общая ковариантность и принцип эквивалентности, что делает ее привлекательной с эстетической точки зрения. Но вопрос о согласии с наблюдениями остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Damour T., Kogan I. I.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 66 P. 104024.
2. *Hassan S. F., Rosen Rachel A.* Bimetric Gravity from Ghost-Free Massive Gravity // JHEP. 2012. V. 1202. P. 126.
3. *Boulware D. G., Deser S.* Can Gravitation Have a Finite Range? // Phys. Rev. D. 1972. V. 6. P. 3368.
4. *de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J.* Resummation of Massive Gravity // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 231101; Ghost-Free Massive Gravity in the Stuckelberg Language // Phys. Lett. B. 2012. V. 711. P. 190.
5. *Соловьев В. О.* Гамильтонова космология бигравитации // ЭЧАЯ. 2017. Т. 48, вып. 2. С. 236.
6. *Enander J., Solomon A. R., Akrami Y., Mortsell E.* Cosmic Expansion Histories in Massive Bigravity with Symmetric Matter Coupling // JCAP. 2015. V. 01. P. 006.
7. *Hassan S. F., Rosen R. A.* Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity // JHEP. 2012. V. 1204. P. 123.
8. *Hinterbichler K., Rosen R. A.* Interacting Spin-2 Fields // Ibid. V. 1207 P. 047.

9. *Соловьев В. О., Чичикина М. В.* Биgравитация в гамильтоновом формализме Кухаржа. Общий случай // ТМФ. 2013. Т. 176, вып. 3. С. 393.
10. *Soloviev V. O., Tchichikina M. V.* Bigravity in Kuchař's Hamiltonian Formalism. 2. The Special Case // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 084026.
11. *Soloviev V. O.* Constraint Algebra in Tetrad Bigravity // Class. Quant. Grav. 2020. V. 38. P. 025007.
12. *Hassan S. F., Lundkvist A.* Analysis of Constraints and Their Algebra in Bimetric Theory // JHEP. 2018. V. 08. P. 182.
13. *Fairlie D., Leznov A.* General Solutions of the Monge–Ampère Equation in n-Dimensional Space // J. Geom. Phys. 1995. V. 16. P. 385.
14. *Alexandrov S., Krasnov K., Speziale S.* Chiral Description of Ghost-Free Massive Gravity // JHEP. 2013. V. 1306. P. 068.
15. *Alexandrov S.* Canonical Structure of Tetrad Bimetric Gravity // Gen. Rel. Grav. 2014. V. 46. P. 1639.

Получено 27 октября 2022 г.