Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 5(250). С. 1098–1105

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ДИНАМИКА СОСТОЯНИЙ С ПОЛУЦЕЛЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА В СОБСТВЕННОМ ПОЛЕ

А. С. Чихачев [1]

Всероссийский электротехнический институт Российского федерального ядерного центра — филиал Всероссийского научно-исследовательского института технической физики им. Е. И. Забабахина, Москва

Изучается нестационарная самосогласованная квантовая система, интенсивно взаимодействующая с собственным полем. При ненулевом моменте пси-функция не может быть не зависящей от углов сферической системы координат. Определены условия, при которых в случае полуцелых значений момента ($l = \pm 1/2$) распределение плотности заряда оказывается сферически-симметричным. В этом случае самосогласованная система может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

The paper studies a nonstationary self-consistent quantum system that intensively interacts with its own field. At a non-zero moment, the psi function cannot be independent of the angles of the spherical coordinate system. The paper defines the conditions under which in the case of half-integer values of the moment ($l = \pm 1/2$) the charge density distribution turns out to be spherically symmetric. In this case, a self-consistent system can be described by a system of ordinary differential equations.

PACS: 03.65.−w

ВВЕДЕНИЕ

Изучение нестационарных систем, интенсивно взаимодействующих с собственным полем, вызывает большой интерес как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения. Особый интерес представляет квантово-механическая система, использующая нестационарный гамильтониан. В настоящей работе будет применен нестационарный гамильтониан, следующий из работ Мещерского [1]. Этот гамильтониан использован в работе [2] для решения квантово-механической задачи. В работах [3, 4] решались задачи в одномерной конфигурации и сферически-симметричная проблема при нулевом орбитальном моменте $l = 0$. В настоящей работе приведено решение уравнения Шредингера в сферических координатах при ненулевом орбитальном моменте, причем рассмотрены задачи с полуцелым орбитальным моментом. Так же, как

[1] E-mail: churchev@mail.ru

и в работах [3, 4], точное решение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Заметим здесь, что используемый нестационарный гамильтониан может быть применен как для квантовых, так и для классических систем. Кинетическое уравнение с использованием модельного нестационарного гамильтониана впервые, по-видимому, сформулировано в работе [5].

1. СОСТОЯНИЯ С МОМЕНТОМ $l = 1/2$

Состояние квантовой системы с ненулевым моментом в центральном поле описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\hat{L}}{r^2}\Psi\right) + U(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t), \tag{1.1}$$

где

$$\hat{L} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Положим $\Psi = \psi(r,t)Y(\varphi,\theta)$. При этом $\hat{L}Y = LY$, где $L = l(l+1)$ — квадрат полного момента. При $L \neq 0$ в уравнении присутствуют производные по угловым переменным, что означает отсутствие сферической симметрии изучаемого состояния, что является существенным обстоятельством для систем с собственным полем.

Представим также и потенциал в виде произведения функции от углов на функцию от радиуса: $U(\mathbf{r},t) = \Delta(\theta,\varphi)U(r,t)$. В дальнейшем будут определены условия, при которых $\Delta(\theta,\varphi) \equiv \mathrm{const}$.

Рассмотрим далее случай, когда $L = l(l+1)$, и введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r,t) = \psi_1(r,t)r^l$, причем будем изучать нестационарную систему, описываемую потенциалом вида $U(\mathbf{r},t) = (\Delta/\xi(t)^2)U(r/\xi(t))$. Получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{2(l+1)}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right) + \frac{\Delta}{\xi(t)^2}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right)\psi_1(r,t). \tag{1.2}$$

Положим $L = 3/4 (l = 1/2)$. Введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r,t) = \psi_1(r,t)\sqrt{r}$. Введем новые переменные: $\tau = \int(dt'/\xi(t')^2)$, $\rho = r/\xi$. Здесь $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{\xi}(t) = \lambda/\xi^3$, λ — константа, $\lambda = -1/(4\tau_0^2)$. Тогда (1.2) приводится к виду

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} - \frac{\rho}{\xi}\frac{d\xi}{d\tau}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right) + U(\rho)\psi_1(\rho,\tau)\Delta. \tag{1.3}$$

Введем далее ψ_2, положив $\psi_1 = \psi_2\Lambda/\xi^{5/2}$, где $\Lambda = \exp\left(\dfrac{im}{2\hbar\xi}\dfrac{d\xi}{d\tau}\right)$. Получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\right) + U(\rho)\psi_2(\rho,\tau)\Delta - \frac{m\rho^2}{8\tau_0^2}\psi_2 + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\psi_2. \tag{1.4}$$

Плотность заряда имеет вид $Q = |\Psi|^2 = |\psi_2|^2\rho|Y|^2/\xi^4$, где Y удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{1.5}$$

Вместо переменной θ введем $\eta = \ln(\mathrm{tg}\,(\theta/2))$. Тогда уравнение принимает вид

$$\mathrm{ch}^2\,\eta\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) = -\frac{3}{4}Y. \tag{1.6}$$

Далее будем учитывать спинорный характер Ψ-функции и представлять Y в виде столбца $Y = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\begin{pmatrix}\exp(i\varphi/2)\\ \exp(-i\varphi/2)\end{pmatrix}$, соответственно Y^+ — это строка:

$$Y^+ = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\,(\exp(-i\varphi/2),\, \exp(i\varphi/2)).$$

Зависимость плотности от углов определяется произведением Y^+Y и при выбранном представлении не зависит от угла φ: $Y^+Y = \Omega(\eta)$.

Представим потенциал в виде произведения функции от радиуса на функцию от угловых переменных, а поскольку плотность заряда не зависит от φ, то потенциал также не зависит от φ: $U(\boldsymbol{\rho}) = \Delta(\eta)U(\rho)$. Используя переменную η вместо θ, получим

$$\Delta(\eta)\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU(\rho)}{d\rho} + \frac{U(\rho)}{\rho^2}\,\mathrm{ch}^2(\eta)\left(\frac{d^2\Delta}{d\eta^2}\right) = Q. \tag{1.7}$$

Здесь Q — плотность заряда. В случае взаимодействия с собственным полем $Q = -\kappa_0|\Psi|^2$, κ_0 — константа связи. Полное отделение функции радиуса от функции угла может быть достигнуто, если выполнены условия $\mathrm{ch}^2(\eta)(d^2\Delta/d\eta^2) = \nu\Delta$ (ν — константа) и $\Omega \equiv \Delta$. Из (1.6) можно получить

$$\mathrm{ch}^2(\eta)(2\Omega''\Omega - \Omega'^2 - \Omega^2) = -3\Omega^2. \tag{1.8}$$

Исключая из этих соотношений $\mathrm{ch}^2(\eta)$, получим уравнение

$$\Omega''\Omega(2\nu + 3) = \nu(\Omega'^2 + \Omega^2). \tag{1.9}$$

Это уравнение имеет интеграл $C_1 = \Omega^{-\frac{2\nu}{2\nu+3}}(\Omega'^2 - (\nu/(\nu+3))\Omega^2)$. Из этого соотношения при $-3 < \nu < 0$ можно получить

$$\Omega = \left[\sqrt{C_1\frac{\nu+3}{-\nu}}\sin\left(\eta\frac{2\nu+3}{\sqrt{-\nu(\nu+3)}}\right)\right]^{\frac{2\nu+3}{\nu+3}}.$$

В случае $\nu = -3/2$ с хорошей точностью $\Omega \equiv 1$.

Из (1.7) следует уравнение

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho} - \frac{3}{2}\frac{U}{\rho^2} = -\kappa_0|\psi_2|^2\rho. \tag{1.10}$$

В уравнении (1.4) сделаем замену

$$\psi_2 = \exp\left(-\frac{iE\tau}{\hbar}\right) R(\rho) \exp\left(i\theta(\rho)\right), \tag{1.11}$$

где E — действительная величина; $R(\rho), \theta(\rho)$ — действительные функции. Положив $\dot{\xi}/\xi \equiv \mathrm{const} = 1/(2\tau_0)$, получим систему

$$ER = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' - R\theta'^2 + \frac{3}{\rho}R'\right) + R\left(U + \frac{\lambda m \rho^2}{2}\right), \tag{1.12}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(2R'\theta' + R\theta'' + \frac{3}{\rho}R\theta'\right) - \frac{\hbar}{\tau_0}R = 0. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.10) (с заменой $|\psi_2|^2$ на R^2) и (1.12) и (1.13) образуют замкнутую систему, описывающую нестационарную динамику. Вместо ρ введем безразмерную переменную s: $\rho = l_0 s$, $l_0^2 = (2\hbar\tau_0)/m$. Обозначим $y = l_0\theta'$, $V = (4\tau_0 U)/\hbar$, $\epsilon = (4\tau_0 E)/\hbar$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 4\tau_0/\hbar((2\hbar\tau_0)/m)^2$. Тогда система принимает вид

$$R'' - Ry^2 + \frac{3R'}{s} = (V(s) - \epsilon - s^2)R, \tag{1.14}$$

$$2R'y + Ry' + \frac{3}{s}Ry = -R, \tag{1.15}$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dV}{ds} - \frac{3}{2}\frac{V(s)}{s^2} = -\kappa_1 s R^2. \tag{1.16}$$

По-видимому, эта система не имеет решения, регулярного в нуле. На рис. 1 и 2 приведены результаты решения уравнений (1.14)–(1.16) с заданными начальными условиями при $s = 1$. Считалось, что $V(1) = 10, V'(1) = 0, R(1) = 1, R'(1) = 0, y(1) = 0$. Начальная точка для всех кривых $s_0 \approx 0{,}34$. Плотность заряда в этой точке растет с убыванием s (кривая *2* на рис. 1), а $y(s)$ (кривая *2* на рис. 2) убывает с убыванием s. Кривая *1* на рис. 2 — s^2V', описывающая полный заряд внутри сгустка радиусом s, имеет экстремум — полный заряд сначала растет, а потом убывает.

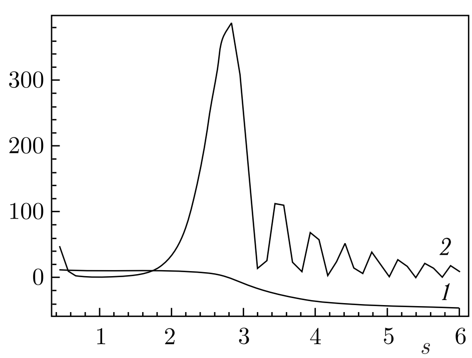

Рис. 1. Зависимость потенциала $V(s)$ (кривая *1*) и плотности заряда $R(s)^2$ (кривая *2*) от автомодельной переменной s

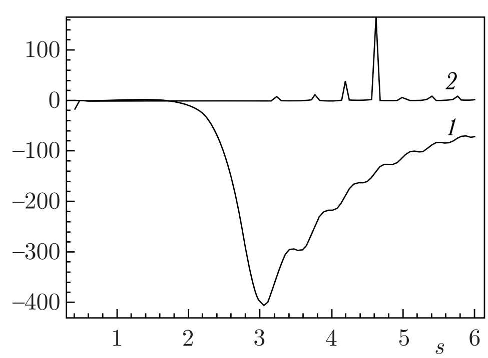

Рис. 2. Зависимость $s^2V'(s)$ (кривая *1*) и зависимость $y(s)$ (кривая *2*)

2. СОСТОЯНИЯ С МОМЕНТОМ $l = -1/2$

В отличие от предыдущего раздела рассмотрим далее случай, когда $L = -1/4$ ($l = -1/2$). Как и ранее, положим $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r, t)Y(\theta, \varphi)$. Введем функцию ψ_1 посредством равенства $\psi(r, t) = \psi_1(r, t)/\sqrt{r}$, причем потенциал также представим в виде произведения функции от углов на функцию от r, t: $\Delta(\theta, \varphi)U(r/\xi)1/\xi^2$. Получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right) + \frac{\Delta}{\xi(t)^2}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right)\psi_1(r, t). \tag{2.1}$$

Введем новые переменные $\tau = \int dt'/\xi(t')^2$, $\rho = r/\xi$. Тогда (2.1) приводится к виду

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} - \rho\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right) + U(\rho)\psi_1(\rho, \tau)\Delta. \tag{2.2}$$

Введем далее ψ_2, положив $\psi_1 = \psi_2\Lambda/\xi^{3/2}$. Получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\right) + U(\rho)\psi_2(\rho, \tau)\Delta - \frac{m\rho^2}{8\tau_0^2}\psi_2 + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\psi_2. \tag{2.3}$$

Плотность заряда имеет вид $Q = |\Psi|^2 = (|\psi_2|^2|Y|^2)/(\rho\xi^4)$, где Y удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{2.4}$$

Вместо переменной θ введем $\eta = \ln(\mathrm{tg}\,(\theta/2))$. Тогда уравнение принимает вид

$$\mathrm{ch}^2\,\eta\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) = -\frac{1}{4}Y. \tag{2.5}$$

Далее будем учитывать спинорный характер Ψ-функции и представлять Y в виде столбца $Y = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\begin{pmatrix}\exp(i\varphi/2)\\ \exp(-i\varphi/2)\end{pmatrix}$, соответственно Y^+ — это строка:

$$Y^+ = \sqrt{\Omega(\eta)/2}\,(\exp(-i\varphi/2), \exp(i\varphi/2)).$$

Зависимость плотности от углов определяется произведением Y^+Y и при выбранном представлении не зависит от угла φ: $Y^+Y = \Omega(\eta)$. Представим потенциал в виде произведения функции от радиуса на функцию от угловых переменных, а поскольку плотность заряда не зависит от φ, то потенциал также не зависит от φ: $U(\boldsymbol{\rho}) = \Delta(\eta)U(\rho)$. Используя переменную η вместо θ, получим

$$\Delta(\eta)\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU(\rho)}{d\rho} + \frac{U(\rho)}{\rho^2}\,\mathrm{ch}^2(\eta)\left(\frac{d^2\Delta}{d\eta^2}\right) = Q. \tag{2.6}$$

Здесь Q — плотность заряда. В случае взаимодействия с собственным полем $Q = -\kappa_0|\Psi|^2$, κ_0 — константа связи. Полное отделение функции радиуса от функции угла может быть достигнуто, если выполнены условия $\mathrm{ch}^2(\eta)(d^2\Delta/d\eta^2) = \nu\Delta$ (ν — константа) и $\Omega \equiv \Delta$. Из (2.5) можно получить

$$\mathrm{ch}^2(\eta)(2\Omega''\Omega - \Omega'^2 - \Omega^2) = -\Omega^2. \tag{2.7}$$

Исключая из этих соотношений $\mathrm{ch}^2(\eta)$, получим уравнение

$$\Omega''\Omega(2\nu + 1) = \nu(\Omega'^2 + \Omega^2). \tag{2.8}$$

Это уравнение имеет интеграл $C_1 = \Omega^{-\frac{2\nu}{2\nu+1}}(\Omega'^2 - (\nu/(\nu+1))\Omega^2)$. Из этого соотношения при $-1 < \nu < 0$ можно получить

$$\Omega = \left[\sqrt{C_1 \frac{\nu+1}{-\nu}} \sin\left(\eta \frac{2\nu+1}{\sqrt{-\nu(\nu+1)}}\right)\right]^{\frac{2\nu+1}{\nu+1}}.$$

В случае $\nu = -1/2$ с хорошей точностью $\Omega = 1$, также отсюда следует $\Delta \equiv 1$ и что распределение плотности заряда является сферически-симметричным.

Из (2.6) следует уравнение

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho} - \frac{1}{2}\frac{U}{\rho^2} = -\kappa_0\frac{|\psi_2|^2}{\rho}. \tag{2.9}$$

В уравнении (2.3) сделаем замену

$$\psi_2 = \exp\left(-\frac{iE\tau}{\hbar}\right) R(\rho)\exp\left(i\theta(\rho)\right), \tag{2.10}$$

где E — действительная величина; $R(\rho), \theta(\rho)$ — действительные функции. Положив $\dot{\xi}/\xi \equiv \mathrm{const} = 1/(2\tau_0)$, получим систему

$$ER = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' - R\theta'^2 + \frac{1}{\rho}R'\right) + R\left(U + \frac{\lambda m\rho^2}{2}\right), \tag{2.11}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(2R'\theta' + R\theta'' + \frac{1}{\rho}R\theta'\right) - \frac{\hbar}{\tau_0}R = 0. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.9) (с заменой $|\psi_2|^2$ на R^2) и (2.11) и (2.12) образуют замкнутую систему, описывающую нестационарную динамику. Вместо ρ введем безразмерную переменную s: $\rho = l_0 s$, $l_0^2 = (2\hbar\tau_0)/m$. Обозначим $y = l_0\theta'$, $V = (4\tau_0 U)/\hbar$, $\epsilon = (4\tau_0 E)/\hbar$, $\kappa_1 = \kappa_0 = (4\tau_0)/\hbar\,((2\hbar\tau_0)/m)^2$. Тогда система принимает вид

$$R'' - Ry^2 + \frac{R'}{s} = (V(s) - \epsilon - s^2)R, \tag{2.13}$$

$$2R'y + Ry' + \frac{1}{s}Ry = -R, \tag{2.14}$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dV}{ds} - \frac{1}{2}\frac{V(s)}{s^2} = -\kappa_1\frac{R^2}{s}. \tag{2.15}$$

Система (2.13)–(2.15) решалась при следующих условиях: $R(0) - 1$, $R'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Вместо $V(s)$ введено $V_1(s) = V(s)/s$, причем $V_1(0) = 2$, $V_1'(0) = 0$. Как можно видеть из рис. 3 и 4, плотность заряда имеет колебательный характер с убы-

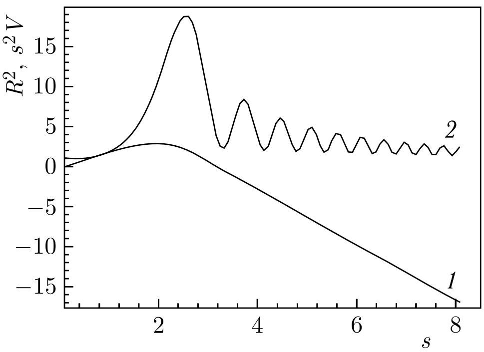

Рис. 3. Зависимость потенциала (кривая *1*) и плотности заряда (кривая *2*) от автомодельной переменной s

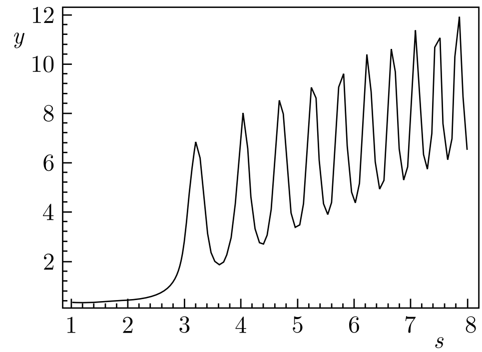

Рис. 4. Зависимость $y(s)$

вающей амплитудой, а функция $y(s)$ характеризуется колебаниями относительно линейно растущей функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе найдены решения модельных нестационарных задач, характеризуемых ненулевым моментом. Изучены условия, при которых в случае полуцелых значений орбитального момента ($l = \pm 1/2$) плотность заряда является сферически-симметричной. При этом потенциал собственного поля не зависит от углов. В этом случае динамика ансамбля может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von verändlicher Masse // Astron. Nachr. 1902. V. 59. P. 229.
2. *Dodonov V. V., Man'ko V. I., Nikonov D. T.* Exact Propagators for Time-Dependent Coulomb, Delta and Other Potential // Phys. Lett. A. 1992. V. 162. P. 359–364.
3. *Chikhachev A. S.* Quantum Problem on the Dynamics of an Electric Charge in Its Own Field // Phys. Part. Nucl. Lett. 2020. V. 17, No. 3. P. 325–328.
4. *Чихачев А. С.* Нестационарная динамика системы зарядов в собственном поле // ЕНО. 2021. Т. 1, № 71. С. 69–76.
5. *Чихачев А. С.* Нестационарная самосогласованная модель ансамбля в собственном поле // ЖТФ. 2014. Т. 84, № 4. С. 19.

Получено 16 февраля 2023 г.