Письма в ЭЧАЯ. 2024. Т. 21, № 4(255). С. 823–837

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РАСЩЕПЛЕННЫЙ ОПЕРАТОР КАЗИМИРА АЛГЕБРЫ $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ И $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВОЖЕЛЯ

А. А. Проворов [1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Найдены характеристические тождества для 2- и 3-расщепленных операторов Казимира алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ в представлениях $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ и $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$, а также построены проекторы на инвариантные подпространства этих представлений и получены формулы для их суперследов. Все формулы находятся в соответствии с универсальным описанием подпредставлений представлений $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ и $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ базовых классических супералгебр Ли в терминах параметров Вожеля.

Characteristic identities for 2- and 3-split Casimir operators in the representations $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ and $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ of $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ have been found. Projectors onto invariant subspaces of these representations as well as formulas for their supertraces, have been obtained. All acquired formulas are in correspondence with the universal description of the representations $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ and $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ of basic classical Lie superalgebras in terms of Vogel parameters.

PACS: 02.20.Qs; 02.20.Sv

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена применению расщепленного оператора Казимира (РОК — см. определение в разд. 1) к изучению теории представлений супералгебр Ли, в частности алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ (см., например, [1]), в контексте так называемой универсальной алгебры Ли.

Расщепленный оператор Казимира играет важную роль в теории представлений алгебр и супералгебр Ли, используется при построении решений уравнения Янга–Бакстера [2, 3], оказывается полезным при вычислении цветовых факторов диаграмм Фейнмана в калибровочных теориях [4]. Преимущество использования РОК при изучении представлений алгебр и супералгебр Ли по сравнению с остальными методами заключается в его универсальности: этот способ работает одинаковым образом для всех простых алгебр и супералгебр Ли с невырожденной инвариантной метрикой.

В данной работе РОК используется для изучения структуры представлений $\mathrm{ad}^{\otimes k}$ для $k = 2, 3$ комплексной супералгебры Ли $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$. Эта алгебра является деформацией алгебры $osp(4|2)$, зависящей от комплексного параметра $\boldsymbol{\alpha}$ [5, 6], и вместе

[1] E-mail: aleksanderprovorov@gmail.com

с $sl\,(M|N)$ при $M \neq N$, $osp\,(M|N)$, $psl\,(N|N)$, g_3 и f_4 принадлежит к классу базовых классических супералгебр Ли. В отличие от остальных таких супералгебр Ли у $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ нет аналогов среди алгебр Ли: для базовых классических супералгебр Ли серий A, B, C, D таковыми являются алгебры Ли классических серий, аналогами алгебр g_3 и f_4 являются исключительные алгебры Ли, но среди простых алгебр Ли нет семейства, зависящего от непрерывного параметра. Это делает алгебру $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ более интересной для изучения, так как ее свойства оказываются менее предсказуемыми.

Изучение РОК также было мотивировано понятием универсальной алгебры Ли, введенным П. Вожелем [7]. По предположению, универсальная алгебра Ли является моделью всех простых комплексных алгебр Ли и некоторых простых супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ в следующем смысле: каждой такой алгебре ставятся в соответствие три числа, определенные с точностью до перестановки и общего множителя, называемые параметрами Вожеля. Многие величины, характеризующие данную алгебру и ее представления, выражаются одинаковыми формулами для всех простых алгебр Ли и базовых классических супералгебр Ли. Например, через параметры Вожеля выражаются (супер)размерность алгебры $\mathfrak{g}$, размерности представлений T_μ, входящих в разложение $\mathrm{ad}^{\otimes k} = \sum\limits_{\mu} T_\mu$ для $k = 2, 3$ (здесь T_μ — не обязательно неприводимое представление) [7], значения высших операторов Казимира в представлении ad [8]. В оригинальной статье [7] понятие универсальной алгебры было получено путем весьма нетривиальных рассуждений, берущих свое начало в теории узлов. Использование РОК позволяет подойти к данному вопросу с более элементарных позиций.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 дано определение расщепленного оператора Казимира, а также вводятся определения и соглашения, используемые по ходу работы. Кроме того, в данном разделе вводятся параметры Вожеля и дается краткий обзор результатов, полученных при изучении представлений $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ и $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$ для алгебр и супералгебр Ли. Разд. 2 посвящен определению алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ и нахождению РОК этой алгебры. Наконец, разд. 3 посвящен нахождению универсальных характеристических тождеств 2- и 3-расщепленного оператора Казимира алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ в присоединенном представлении и построению проекторов на инвариантные подпространства для этих операторов.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

1.1. Расщепленный оператор Казимира. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная супералгебра Ли с невырожденной инвариантной метрикой g (не обязательно совпадающей с метрикой Картана–Киллинга $\boldsymbol{\kappa}$, которая для простых супералгебр Ли может обнуляться), имеющей в некотором однородном базисе $\{X_A\}_{A=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ этой алгебры (см. соответствующие определения, например, в [9, 10]) компоненты g_{AB}. Четность базисного вектора X_A будем обозначать как $[A]$. Компоненты обратной метрики $\overline{\mathsf{g}}^{AB}$ определяются условиями $\overline{\mathsf{g}}^{AB}\mathsf{g}_{BC} = \delta^A_C$. Расщепленный (или 2-расщепленный) оператор Казимира $\widehat{C}$ (или $\widehat{C}_{(2)}$) определяется как элемент алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, задаваемый выражением (см. также [11]):

$$\widehat{C} = \overline{\mathsf{g}}^{AB} X_A \otimes X_B. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$, а символом $\otimes$ здесь и далее обозначается градуированное тензорное произведение (см., например, [11]).

Также будем пользоваться высшими расщепленными операторами Казимира. А именно, n-расщепленным оператором Казимира называется элемент алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, задаваемый выражением

$$\widehat{C}_{(n)} := \sum_{i<j}^{n} \widehat{C}_{ij}, \tag{2}$$

где

$$\widehat{C}_{ij} = \overline{\mathrm{g}}^{AB}(I^{\otimes(i-1)} \otimes X_A \otimes I^{\otimes(j-i-1)} \otimes X_B \otimes I^{\otimes(n-j)}), \tag{3}$$

а $I \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ — единичный элемент.

Далее будем рассматривать операторы $\widehat{C}_{(n)}$ в n-й тензорной степени присоединенного представления $\mathrm{ad}^{\otimes n}$ (для простоты также будем говорить о $\widehat{C}_{(n)}$ в присоединенном представлении). Определение присоединенного представления супералгебры Ли, (градуированного) тензорного произведения представлений см., например, в работе [11]. Пространство присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ (совпадающего как линейное пространство с самой алгеброй) будем обозначать V_{ad}.

Компоненты $\mathrm{ad}(X_A)^B{}_C$ базисного вектора X_A в присоединенном представлении совпадают со структурными константами $\mathrm{ad}(X_A)^B{}_C = X^B{}_{AC}$ алгебры $\mathfrak{g}$, определяемыми соотношением

$$[X_A, X_B] = X_C X^C{}_{AB}, \tag{4}$$

где $[\ ,\ ]$ — суперскобка Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Компоненты оператора $\mathrm{ad}^{\otimes 2}(\widehat{C})$ задаются выражением [11]

$$\mathrm{ad}^{\otimes 2}(\widehat{C})^{A_1A_2}{}_{B_1B_2} = (-1)^{[B_1][C_2]}\overline{\mathrm{g}}^{C_1C_2} X^{A_1}{}_{C_1B_1} X^{A_2}{}_{C_2B_2}. \tag{5}$$

Для упрощения нотации будем писать X_A вместо $\mathrm{ad}(X_A)$, $\widehat{C}_{(n)}$ вместо $\mathrm{ad}^{\otimes n}(\widehat{C}_{(n)})$, и аналогично для всех симметризаций $\widehat{C}_{(n)}$, которые мы определим далее. Кроме того, под I будем также понимать единичный оператор, действующий в V_{ad}.

Оператор $\widehat{C}_{(n)}$ обладает свойством ad-инвариантности: для произвольного $A = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ выполняется

$$\left[\widehat{C}_{(n)}, \sum_{i=1}^{n} (X_A)_i\right] = 0, \tag{6}$$

где $[\ ,\ ]$ — расширение суперскобки алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ (подробнее см. в [11]), а $(X_A)_i := I^{\otimes(i-1)} \otimes X_A \otimes I^{\otimes(n-i)}$. Отметим, что, так как $\widehat{C}$ является четным оператором, суперскобка Ли здесь совпадает с обычным коммутатором. Понятие ad-инвариантности тесным образом связано с обобщением леммы Шура на случай супералгебр Ли [10], которое мы здесь приведем.

Теорема 1. *Пусть $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ — линейное суперпространство (см., например, [11]) с четной частью $V_{\overline{0}}$ и нечетной частью $V_{\overline{1}}$, $\mathscr{M}$ — неприводимое семейство операторов, действующих в V, а $C(\mathscr{M})$ — пространство операторов в V, суперкоммутирующих со всеми операторами из $\mathscr{M}$. Тогда либо $C(\mathscr{M}) = \mathbb{C}\mathcal{I}$, где*

$\mathcal{I}$ — единичный оператор в V, либо $\dim V_{\bar 0} = \dim V_{\bar 1}$ и $C(\mathscr{M}) = \mathbb{C}\mathcal{I} \oplus \mathbb{C}\widehat{\mathcal{A}}$, где $\widehat{\mathcal{A}}$ — невырожденный оператор, действующий в V и переставляющий $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$, причем $\widehat{\mathcal{A}}^2 = \mathcal{I}$.

Следствием ad-инвариантности оператора $\widehat{C}_{(n)}$ (если он является четным, см. далее) является тот факт, что если представление T_μ, входящее в разложение $\mathrm{ad}^{\otimes n} = \sum\limits_{\mu} T_\mu$, неприводимо, то по теореме 1 пространство этого представления должно быть собственным подпространством оператора $\widehat{C}_{(n)}$, а если представление T_μ — приводимо, но не является вполне приводимым, то пространство этого представления может быть как собственным, так и обобщенным собственным подпространством $\widehat{C}_{(n)}$. Отметим, что оператор $\widehat{C}_{(n)}$ должен быть четным, так как в противном случае на пространстве неприводимого представления V он может иметь вид $\widehat{C}_{(n)} = a\mathcal{I} + b\widehat{A}$, где $a, b \in \mathbb{C}$. В таком случае собственные подпространства $\widehat{C}_{(n)}$ не будут совпадать с V, т. е. не будут пространствами неприводимых подпредставлений алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть характеристическое тождество некоторого оператора $\mathcal{A} : V \to V$ имеет вид

$$(\mathcal{A} - a_1\mathcal{I})^{k_1}(\mathcal{A} - a_2\mathcal{I}_T)^{k_2} \cdots (\mathcal{A} - a_p\mathcal{I})^{k_p} = 0, \tag{7}$$

где все $a_i \in \mathbb{C}$ различны, $k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $\mathcal{I}$ — единичный оператор в V. Проекторы на обобщенные собственные пространства оператора $\mathcal{A}$ задаются выражениями [11]

$$\mathrm{P}_{a_j} = \mathcal{I} - \left(\mathcal{I} - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} \left(\frac{\mathcal{A} - a_i\mathcal{I}}{a_j - a_i}\right)^{k_i}\right)^{k_j}. \tag{8}$$

Если $k_i = 1$, то образом проектора P_i является собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, иначе — обобщенное собственное подпространство. Более того, подробно этот случай будет рассмотрен на конкретном примере оператора $\widehat{C}_{-}$ (см. разд. 3).

Суперследом оператора $\mathcal{A}$ с компонентами $\mathcal{A}^A{}_B$ называется величина

$$\mathrm{str}\,\mathcal{A} := (-1)^{[A]}\mathcal{A}^A{}_A. \tag{9}$$

Кроме того, суперслед проектора P_{a_j} совпадает с суперразмерностью выделяемого этим проектором подпространства:

$$\mathrm{sdim}\,\mathrm{P}_{a_j}V = \mathrm{str}\ \mathrm{P}_{a_j}. \tag{10}$$

1.2. Симметризации n-расщепленного оператора Казимира. При изучении представлений $\mathrm{ad}^{\otimes n}$ алгебр и супералгебр Ли удобнее пользоваться не операторами $\widehat{C}_{(n)}$, а их ограничениями на определенным образом симметризованные подпространства $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes n}$. Определим операторы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, задаваемые соотношениями

$$\mathcal{I} = I^{\otimes n}, \quad \mathcal{P}_{ij} = (-1)^{[B]} I^{\otimes(i-1)} \otimes e_A{}^B \otimes I^{\otimes(j-i-1)} \otimes e_B{}^A \otimes I^{\otimes(n-i-j)} \tag{11}$$

и действующие в $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes n}$. Здесь $e_A{}^B \in \mathrm{End}\,(V_{\mathrm{ad}})$ — матричные единицы, $(e_A{}^B)^C{}_D = \delta^C_A\delta^B_D$. Из определения следует, что $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes n}$, а $\mathcal{P}_{ij}$ — оператор суперперестановки пространств с номерами i и j в тензорном произведении $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes n}$. В частности, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{12}$, действующие в пространстве $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 2}$, имеют компоненты

$$\mathcal{I}^{A_1A_2}{}_{B_1B_2} = \delta^{A_1}_{B_1}\delta^{A_2}_{B_2}, \quad \mathcal{P}^{A_1A_2}{}_{B_1B_2} = (-1)^{[A_1][A_2]}\delta^{A_1}_{B_2}\delta^{A_2}_{B_1}. \tag{12}$$

Отметим, что операторы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$ реализуют в пространстве $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes n}$ представление группы перестановок S_n (см. [11]).

Можно проверить, что операторы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$ обладают свойством ad-инвариантности (6), где вместо $\widehat{C}_{(n)}$ нужно подставить $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$ соответственно. Следовательно, любое произведение операторов $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}_{ij}$ и $\widehat{C}_{(n)}$ и их линейные комбинации также будут ad-инвариантными. Кроме того, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}$ коммутируют с $\widehat{C}_{(n)}$, т. е. $\widehat{C}_{(n)}$ совместно диагонализуется с произвольным оператором, построенным как полином от $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$.

Пользуясь $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}_{ij}$, определим симметризаторы Юнга на пространствах $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 2}$ и $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 3}$, а также соответствующим образом симметризованные части операторов $\widehat{C}$ и $\widehat{C}_{(3)}$. Для пространства $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 2}$ получаем [11, 13]

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_+ &= \frac{1}{2}(\mathcal{I}+\mathcal{P}) \implies \widehat{C}_+ := \mathrm{P}_+\,\widehat{C}, \\ \mathrm{P}_- &= \frac{1}{2}(\mathcal{I}-\mathcal{P}) \implies \widehat{C}_- := \mathrm{P}_-\,\widehat{C}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для пространства $V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 3}$ имеем [13]

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{[3]} &= \frac{1}{3!}(\mathcal{I}+\mathcal{P}_{23}+\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{23})(\mathcal{I}+\mathcal{P}_{12}) \implies \widehat{C}_{[3]} = \mathrm{P}_{[3]}\,\widehat{C}_{(3)}, \\ \mathrm{P}_{[1^3]} &= \frac{1}{3!}(\mathcal{I}-\mathcal{P}_{23}+\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{23})(\mathcal{I}-\mathcal{P}_{12}) \implies \widehat{C}_{[1^3]} = \mathrm{P}_{[1^3]}\,\widehat{C}_{(3)}, \\ \mathrm{P}_{[21]} &= \frac{1}{3}(\mathcal{I}+\mathcal{P}_{12})(\mathcal{I}-\mathcal{P}_{13}) \implies \widehat{C}_{[21]} = \mathrm{P}_{[21]}\,\widehat{C}_{(3)}, \\ \mathrm{P}_{[21]'} &= \frac{1}{3}(\mathcal{I}+\mathcal{P}_{13})(\mathcal{I}-\mathcal{P}_{12}) \implies \widehat{C}_{[21]'} = \mathrm{P}_{[21]'}\,\widehat{C}_{(3)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Далее всегда будем считать, что нулевая степень любой симметризации оператора $\widehat{C}_{(n)}$, $n=2,3$, совпадает с соответствующим симметризатором Юнга, например, $\widehat{C}^0_{[3]} = \mathrm{P}_{[3]}$.

Отметим, что любые соотношения, справедливые для оператора $\widehat{C}_{[21]'}$, можно получить из аналогичных соотношений для $\widehat{C}_{[21]}$ заменой $\widehat{C}_{[21]'} = \mathcal{P}_{23}\widehat{C}_{[21]}\mathcal{P}_{23}$, поэтому случай симметризации $\widehat{C}_{[21]'}$ отдельно рассматриваться не будет.

1.3. Параметры Вожеля. Можно показать, что для простых алгебр Ли и базовых классических супералгебр Ли выполняется следующее универсальное тождество (см. [14] для простых алгебр Ли и [11] для $sl(M|N)$ при $M\neq N$ и $osp(M|N)$ при $M\neq N+2$):

$$(\widehat{C}_+ + 2t)(\widehat{C}_+ + \alpha)(\widehat{C}_+ + \beta)(\widehat{C}_+ + \gamma) = 0, \tag{15}$$

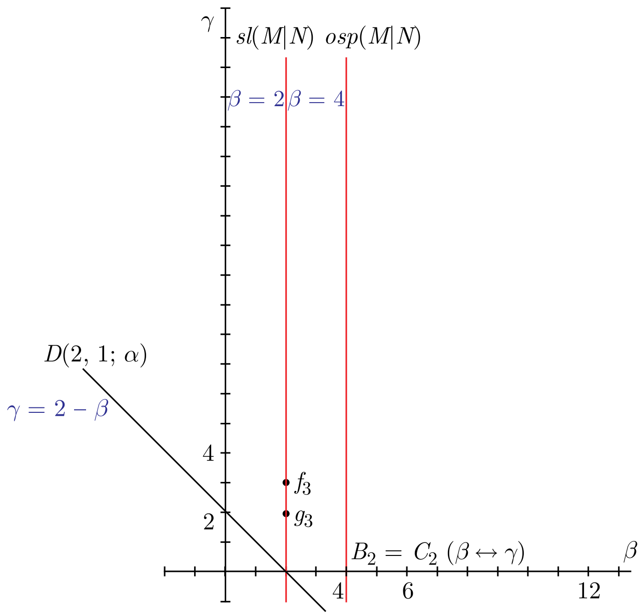
где $t := \alpha+\beta+\gamma$. Отметим, что при написании (15) мы изменили определение оператора $\widehat{C}_+$, используемое в работах [11, 14], домножив этот оператор на $2t$ для дальнейшего удобства. Это переопределение соответствует тому, что в качестве инвариантной метрики g_{AB} указанных алгебр используется не метрика Картана–Киллинга $\boldsymbol{\kappa}_{AB}$, а метрика $(1/2t)\boldsymbol{\kappa}_{AB}$.

Параметры α, β и γ были введены в работе [7] и называются параметрами Вожеля. Значения этих параметров для базовых классических супералгебр Ли приведены в таблице [15].

Значения параметров Вожеля для базовых классических супералгебр Ли

Параметр	$s\ell(M\|N)$	$osp\,(M\|N)$	f_4	g_3	$D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$
α	-2	-2	-2	-2	-2
β	2	4	2	2	$-2\boldsymbol{\alpha}$
γ	$M-N$	$(M-N)-4$	3	2	$2(1+\boldsymbol{\alpha})$
t	$M-N$	$(M-N)-2$	3	2	0

Параметры Вожеля, соответствующие базовым классическим супералгебрам Ли, можно представить на так называемой карте Вожеля. Фиксация параметра $\alpha=-2$ позволяет изобразить карту Вожеля в виде двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$, по осям которой отложены значения параметров β и γ (рисунок).



Карта Вожеля

В работе [12] для простых классических алгебр Ли показано, что для операторов $\widehat{C}_{[3]}$, $\widehat{C}_{[1^3]}$ и $\widehat{C}_{[21]}$ выполняются универсальные тождества

$$\left(\widehat{C}_{[3]}+t\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+2t\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+t-\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+t-\beta\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+t-\gamma\right)\times$$
$$\times\left(\widehat{C}_{[3]}+3\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+3\beta\right)\left(\widehat{C}_{[3]}+3\gamma\right)\mathrm{P}_{[3]}=0, \quad (16)$$

$$\widehat{C}_{[1^3]}\left(\widehat{C}_{[1^3]}+t\right)\left(\widehat{C}_{[1^3]}+3t\right)\times$$
$$\times\left(\widehat{C}_{[1^3]}+t+\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[1^3]}+t+\beta\right)\left(\widehat{C}_{[1^3]}+t+\gamma\right)\mathrm{P}_{[111]}=0, \quad (17)$$

$$
\begin{gathered}
\left(\widehat{C}_{[21]}+t\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+2t\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+t-\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+t-\beta\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+t-\gamma\right)\times \\
\times\left(\widehat{C}_{[21]}+t+\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+t+\beta\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+t+\gamma\right)\times \\
\times\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\beta\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\gamma\right)\mathrm{P}_{[21]}=0. \quad (18)
\end{gathered}
$$

Каждое собственное значение оператора $\widehat{C}_{(3)}$ соответствует определенному представлению. Соответствие собственных значений оператора $\widehat{C}_{(3)}$, представлений (в обозначениях, введенных Вожелем в [7], см. также [12]) и их размерностей записывается следующим образом (аналогичные соотношения выполняются также и для $\widehat{C}$):

$$
\begin{aligned}
-3t: X_0, &\quad \dim X_0 = 1, \\
-2t: X_1, &\quad \dim X_1 = \dim\mathfrak{g}, \\
-t: X_2, &\quad \dim X_2 = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}(\dim\mathfrak{g}-3), \\
0: X_3+X_3', &\quad \dim\left(X_3+X_3'\right) = \frac{1}{6}\dim\mathfrak{g}(\dim\mathfrak{g}-1)(\dim\mathfrak{g}-8), \\
-\alpha-t: Y_2, &\quad \dim Y_2 = -\frac{t(3\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)(\beta+t)(\gamma+t)}{\alpha^2\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \\
-3\alpha: Y_3, &\quad \dim Y_3 = -\frac{1}{3\alpha^3(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(2\alpha-\beta)(2\alpha-\gamma)\beta\gamma}\,t(\alpha-2t)\times \\
&\quad \times(5\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)(\beta+t)(\gamma+t)(2\beta+\gamma)(2\gamma+\beta), \qquad (19) \\
\alpha-t: B, &\quad \dim B = \frac{1}{\alpha^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(2\beta-\gamma)(2\gamma-\beta)\beta^2\gamma^2}\times \\
&\quad \times t(\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)(2\alpha+\beta)(2\alpha+\gamma)(\beta+t)(\gamma+t)\times \\
&\quad \times(3\beta-2)(3\gamma-2), \\
-\alpha: C, &\quad \dim C = -\frac{32}{3}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma(\alpha-2\beta)(\alpha-2\gamma)}\times \\
&\quad \times t(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha+t)(\beta+t)(\gamma+t)\times \\
&\quad \times(2t-\beta)(2t-\gamma)(\beta+\gamma)(2\beta+\gamma)(2\gamma+\beta),
\end{aligned}
$$

где

$$
\dim\mathfrak{g} = \frac{(\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)}{\alpha\beta\gamma} \qquad (20)
$$

— размерность соответствующей алгебры Ли.

Собственные значения оператора $\widehat{C}_{(3)}$ в представлениях Y_2' и Y_2'', Y_3' и Y_3'', B' и B'', C' и C'' и размерности этих представлений получаются из соответствующих значений для представлений Y_2, Y_3, B, C заменами $\alpha\leftrightarrow\beta$ и $\alpha\leftrightarrow\gamma$.

В другой работе будет показано, что эти формулы (при замене размерности $\dim$ на суперразмерность sdim в (19)) справедливы и для супералгебр Ли $sl(M|N)$ при $M \neq N$ и $osp(M|N)$ при $M \neq N+2$.

Здесь также справедливо замечание о перемасштабировании операторов $\widehat{C}_{[3]}$, $\widehat{C}_{[1^3]}$ и $\widehat{C}_{[21]}$, которые были домножены на $2t$ по сравнению с работой [12].

Далее покажем, что эти тождества выполняются также для алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$.

2. АЛГЕБРА $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$

2.1. Структурные соотношения алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$. Алгебра $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ является 17-мерной супералгеброй Ли. Базис [1]

$$\begin{aligned}(X_A)_{A=1}^{17} =&(T_{(1)1},\ T_{(1)2},\ T_{(1)3},\ T_{(2)1},\ T_{(2)2},\ T_{(2)3},\ T_{(3)1},\ T_{(3)2},\ T_{(3)3},\\ &F_{+++},\ F_{++-},\ F_{+-+},\ F_{+--}\ F_{-++},\ F_{-+-},\ F_{--+},\ F_{---})\end{aligned} \tag{21}$$

алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ состоит из четных элементов $T_{(a)i}$, $i=1,2,3$, $a=1,2,3$, и нечетных элементов $F_{\beta\beta'\beta}$, $\beta,\beta',\beta''=+,-$. В формуле (21) явно указан порядок элементов, который будет использоваться при написании матриц для компонент метрики и обратной метрики алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ в данном базисе. Набор $\{T_{(a)i}\}_{i=1}^{3}$ для каждого $a=1,2,3$ является базисом подалгебры $sl_2 \subseteq D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$, а элементы $F_{\beta\beta'\beta''}$ образуют базис пространства тензорного произведения трех определяющих представлений алгебры sl_2. Суперкоммутационные соотношения записываются для $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[T_{(a)i},T_{(b)j}] = i\delta_{ab}\varepsilon_{ijk}T_{(a)k} \equiv T_{(c)k}X^{(c)k}{}_{(a)i,(b)j},\\
&[T_{(1)i},F_{\beta\beta'\beta''}] = \frac{1}{2}(\sigma^i)^{\gamma}{}_{\beta}F_{\gamma\beta'\beta''} \equiv F_{\gamma\gamma'\gamma''}X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(1)i,\beta\beta'\beta''},\\
&[T_{(2)j},F_{\beta\beta'\beta''}] = \frac{1}{2}(\sigma^j)^{\gamma'}{}_{\beta'}F_{\beta\gamma'\beta''} \equiv F_{\gamma\gamma'\gamma''}X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(2)j,\beta\beta'\beta''},\\
&[T_{(3)k},F_{\beta\beta'\beta''}] = \frac{1}{2}(\sigma^k)^{\gamma''}{}_{\beta''}F_{\beta\beta'\gamma''} \equiv F_{\gamma\gamma'\gamma''}X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(3)k,\beta\beta'\beta''},\\
&[F_{\beta\beta'\beta''},F_{\gamma\gamma'\gamma''}] = C_{\beta'\gamma'}C_{\beta''\gamma''}(C\sigma^i)_{\beta\gamma}T_{(1)i} + \boldsymbol{\alpha}C_{\beta''\gamma''}C_{\beta\gamma}(C\sigma^i)_{\beta'\gamma'}T_{(2)i} -\\
&\qquad - (1+\boldsymbol{\alpha})C_{\beta\gamma}C_{\beta'\gamma'}(C\sigma^i)_{\beta''\gamma''}T_{(3)i} \equiv T_{(a)i}X^{(a)i}{}_{\beta\beta'\beta'',\gamma\gamma'\gamma''}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь σ^i — матрицы Паули, $C = i\sigma^2$ — матрица зарядового сопряжения, ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор с $\varepsilon_{123}=1$. Соответственно, структурные константы

$X^{C}{}_{AB}$ (см. определение в (4)) имеют явный вид:

$$
\begin{aligned}
X^{(c)k}{}_{(a)i,(b)j} &= i\delta_{ac}\delta_{bc}\varepsilon_{ijk},\\
X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(1)i,\beta\beta'\beta''} &= \frac{1}{2}(\sigma^i)^{\gamma}{}_{\beta}\delta^{\gamma'}_{\beta'}\delta^{\gamma''}_{\beta''},\\
X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(2)j,\beta\beta'\beta''} &= \frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\beta}(\sigma^j)^{\gamma'}{}_{\beta'}\delta^{\gamma''}_{\beta''},\\
X^{\gamma\gamma'\gamma''}{}_{(3)k,\beta\beta'\beta''} &= \frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\gamma'}_{\beta'}(\sigma^k)^{\gamma''}{}_{\beta''},\\
X^{(1)i}{}_{\beta\beta'\beta'',\gamma\gamma'\gamma''} &= C_{\beta'\gamma'}C_{\beta''\gamma''}(C\sigma^i)_{\beta\gamma},\\
X^{(2)j}{}_{\beta\beta'\beta'',\gamma\gamma'\gamma''} &= \boldsymbol{\alpha}C_{\beta''\gamma''}C_{\beta\gamma}(C\sigma^j)_{\beta'\gamma'},\\
X^{(3)k}{}_{\beta\beta'\beta'',\gamma\gamma'\gamma''} &= -(1+\boldsymbol{\alpha})C_{\beta\gamma}C_{\beta'\gamma'}(C\sigma^k)_{\beta''\gamma''}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

2.2. Инвариантная метрика и расщепленный оператор Казимира алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$. Компоненты метрики Картана–Киллинга алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ в базисе (21) определяются соотношениями [11]

$$\boldsymbol{\kappa}_{AB} = (-1)^{[C]}X^{C}{}_{AD}X^{D}{}_{BC}, \tag{24}$$

где структурные константы определены в (23). Явные вычисления показывают, что метрика $\boldsymbol{\kappa}$ тождественно равна нулю.

Тем не менее у этой алгебры существует невырожденная инвариантная метрика g. Найдем эту метрику для того, чтобы получить явное выражение для оператора $\widehat{C}$ алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$, определенного в (1). По обобщению леммы Шура на супералгебры Ли (см. [10] и теорему 1) данный оператор должен быть четным (см. обсуждение после теоремы 1) и инвариантным.

Эти ограничения накладывают определенные условия на метрику g (которая является обратной к метрике, используемой в определении $\widehat{C}$, см. (1)). Перечислим их.

1. Условие четности:

$$\mathsf{g}_{AB} = 0 \iff [A] \neq [B]. \tag{25}$$

2. Условие инвариантности:

$$\mathsf{g}_{DC}X^{D}{}_{AB} + (-1)^{[A][B]}\mathsf{g}_{BD}X^{D}{}_{AC} = 0. \tag{26}$$

Кроме того, метрика на суперпространстве по определению должна быть суперсимметричной:

$$\mathsf{g}_{AB} = (-1)^{[A][B]}\mathsf{g}_{BA}. \tag{27}$$

Пользуясь явным видом структурных констант (23), можно показать, что уравнения (25), (26) и (27) имеют единственное с точностью до общего множителя решение:

$$
\mathrm{g}_{AB} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\boldsymbol{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\boldsymbol{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\boldsymbol{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(\boldsymbol{\alpha}+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(\boldsymbol{\alpha}+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(\boldsymbol{\alpha}+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{28}
$$

Соответственно, для обратной метрики $\overline{\mathrm{g}}$, компоненты которой в базисе (22) будем обозначать как $\overline{\mathrm{g}}^{AB}$, получим

$$
\overline{\mathrm{g}}^{AB} = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(\boldsymbol{\alpha}+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(\boldsymbol{\alpha}+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(\boldsymbol{\alpha}+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{29}
$$

Отметим, что согласно рассуждениям выше метрика (29) является единственной подходящей для определения оператора $\widehat{C}$ и, соответственно, выделения подпредставлений из $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ и $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$.

Расщепленный оператор Казимира в присоединенном представлении задается формулой (1), где метрика $\overline{\mathrm{g}}$ определена в (29), а X_A — базисные элементы (21) алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$, взятые в присоединенном представлении. Явно $\widehat{C}$ записывается как

$$
\begin{aligned}
\widehat{C} = {} & 2(T_{(1)1} \otimes T_{(1)1} + T_{(1)2} \otimes T_{(1)2} + T_{(1)3} \otimes T_{(1)3}) + \\
& + 2\boldsymbol{\alpha}(T_{(2)1} \otimes T_{(2)1} + T_{(2)2} \otimes T_{(2)2} + T_{(2)3} \otimes T_{(2)3}) - \\
& - 2(\boldsymbol{\alpha}+1)(T_{(3)1} \otimes T_{(3)1} + T_{(3)2} \otimes T_{(3)2} + T_{(3)3} \otimes T_{(3)3}) + \\
& + 2F_{+++} \otimes F_{---} - 2F_{++-} \otimes F_{--+} - \\
& - 2F_{+-+} \otimes F_{-+-} + 2F_{+--} \otimes F_{-++}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ РОК АЛГЕБРЫ $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$

Результаты данного раздела были получены путем вычислений с помощью программы Wolfram Mathematica, проведенных на кластере HybriLIT.

3.1. Характеристические тождества для РОК в представлении $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$. ***3.1.1. Антисимметричная часть.*** Исходя из известных тождеств (см. [11, 12, 14]) для оператора $\widehat{C}_-$ для простых алгебр Ли и базовых классических супералгебр Ли $osp(M|N)$ и $sl(M|N)$ будем искать характеристическое тождество для $\widehat{C}_-$ алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ в виде

$$\widehat{C}_-^2 + \mu_1 \widehat{C}_- + \mu_0 \,\mathrm{P}_- = 0, \tag{31}$$

где μ_i — неопределенные коэффициенты. Решая уравнение (31) для μ_i, получаем

$$\widehat{C}_-^2 = 0. \tag{32}$$

Отметим, что здесь мы столкнулись со случаем, когда $\widehat{C}_-$ удовлетворяет уравнению (7) с $k_1 = 2$. Самый общий вид матрицы, минимальный полином которой совпадает с левой частью (32), в жордановой форме записывается как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

причем в данной матрице присутствует хотя бы один из блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что данная матрица не пропорциональна матрице единичного оператора в $\mathrm{P}_- V_{\mathrm{ad}}^{\otimes 2}$ или прямой сумме таких матриц. По лемме Шура (см. теорему 1) получаем, что обобщенное подпространство оператора $\widehat{C}_-$ не может являться пространством неприводимого подпредставления или прямой суммой пространств неприводимых представлений алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$, т. е. оно является пространством представления, не являющегося вполне приводимым.

Для получения проекторов на обобщенные собственные подпространства оператора $\widehat{C}_-$ воспользуемся формулой (8) с $\mathcal{A} = \widehat{C}_-$, $\mathcal{I} = \mathrm{P}_-$, $p = 1$, $k_1 = 2$, $a_1 = 0$. Получаем

$$\mathrm{P}_0^- = \mathrm{P}_- \,. \tag{34}$$

Для суперследа проектора P_0^-, совпадающего с суперразмерностью подпространства, выделяемого этим проектором, явными вычислениями получаем

$$\mathrm{str}\,\mathrm{P}_- = \mathrm{str}\,\mathrm{P}_0^- = 0. \tag{35}$$

3.1.2. Симметричная часть. Для $\widehat{C}_+$ аналогичным образом находим характеристическое тождество, записываемое в терминах параметров Вожеля $\alpha = 2$, $\beta = 2\boldsymbol{\alpha}$, $\gamma = -2(1+\boldsymbol{\alpha})$ как

$$\widehat{C}_+(\widehat{C}_+ + \alpha)(\widehat{C}_+ + \beta)(\widehat{C}_+ + \gamma) = 0. \tag{36}$$

Отметим, что данное тождество совпадает с тождеством (15) при $t = 0$.

Для построения проекторов на инвариантные подпространства оператора $\widehat{C}_+$ в формуле (8) следует принять $\mathcal{A} = \widehat{C}_+$, $I = \mathrm{P}_+$, $p = 4$, $k_1 = \ldots = k_4 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\alpha$, $a_3 = -\beta$, $a_4 = -\gamma$. В результате имеем следующее:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0^+ &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Big(\widehat{C}_+^3 + (\alpha+\beta+\gamma)\widehat{C}_+^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\widehat{C}_+\Big) + \mathrm{P}_+,\\
\mathrm{P}_{-\alpha}^+ &= -\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\Big(\widehat{C}_+^3 + (\beta+\gamma)\widehat{C}_+^2 + \beta\gamma\widehat{C}_+\Big),\\
\mathrm{P}_{-\beta}^+ &= -\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\Big(\widehat{C}_+^3 + (\alpha+\gamma)\widehat{C}_+^2 + \alpha\gamma\widehat{C}_+\Big),\\
\mathrm{P}_{-\gamma}^+ &= -\frac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\Big(\widehat{C}_+^3 + (\alpha+\beta)\widehat{C}_+^2 + \alpha\beta\widehat{C}_+\Big).
\end{aligned} \tag{37}$$

Для нахождения суперследов проекторов P_0^+, $\mathrm{P}_{-\alpha}^+$, $\mathrm{P}_{-\beta}^+$, $\mathrm{P}_{-\gamma}^+$ вычислим суперследы операторов P_+, $\widehat{C}_+$, $\widehat{C}_+^2$ и $\widehat{C}_+^3$:

$$\mathrm{str}\,\mathrm{P}_+ = 0, \quad \mathrm{str}\,\widehat{C}_+ = \mathrm{str}\,\widehat{C}_+^2 = \mathrm{str}\,\widehat{C}_+^3 = 0. \tag{38}$$

Соответственно, вычисляя суперслед от (37) и применяя (38), получаем

$$\mathrm{str}\,\mathrm{P}_0^+ = 1, \quad \mathrm{str}\,\mathrm{P}_{-\alpha}^+ = \mathrm{str}\,\mathrm{P}_{-\beta}^+ = \mathrm{str}\,\mathrm{P}_{-\gamma}^+ = 0. \tag{39}$$

Данные соотношения находятся в согласии с формулой (19) (см. также [7, 11, 14]).

3.2. Характеристические тождества для РОК в представлении $\mathrm{ad}^{\otimes 3}$**.** Оператор $\widehat{C}_{(3)}$ алгебры $D(2,1;\boldsymbol{\alpha})$ определяется по формуле (2), $\widehat{C}_{ij}$ задается формулой (2) в соответствии с выражением (1) с метрикой (29) и X_A, заданными в (21). Явное выражение для $\widehat{C}_{(3)}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_{(3)} = {} & 2(T_{(1)1}\otimes T_{(1)1}\otimes\mathcal{I} + T_{(1)2}\otimes T_{(1)2}\otimes\mathcal{I} + T_{(1)3}\otimes T_{(1)3}\otimes\mathcal{I}) + \\
& + 2\boldsymbol{\alpha}(T_{(2)1}\otimes T_{(2)1}\otimes\mathcal{I} + T_{(2)2}\otimes T_{(2)2}\otimes\mathcal{I} + T_{(2)3}\otimes T_{(2)3}\otimes\mathcal{I}) - \\
& - 2(\boldsymbol{\alpha}+1)(T_{(3)1}\otimes T_{(3)1}\otimes\mathcal{I} + T_{(3)2}\otimes T_{(3)2}\otimes\mathcal{I} + T_{(3)3}\otimes T_{(3)3}\otimes\mathcal{I}) + \\
& + 2F_{+++}\otimes F_{---}\otimes\mathcal{I} - 2F_{++-}\otimes F_{--+}\otimes\mathcal{I} - \\
& - 2F_{+-+}\otimes F_{-+-}\otimes\mathcal{I} + 2F_{+--}\otimes F_{-++}\otimes\mathcal{I} + \\
& + 2(T_{(1)1}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(1)1} + T_{(1)2}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(1)2} + T_{(1)3}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(1)3}) + \\
& + 2\boldsymbol{\alpha}(T_{(2)1}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(2)1} + T_{(2)2}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(2)2} + T_{(2)3}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(2)3}) - \\
& - 2(\boldsymbol{\alpha}+1)(T_{(3)1}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(3)1} + T_{(3)2}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(3)2} + T_{(3)3}\otimes\mathcal{I}\otimes T_{(3)3}) + \\
& + 2F_{+++}\otimes\mathcal{I}\otimes F_{---} - 2F_{++-}\otimes\mathcal{I}\otimes F_{--+} - \\
& - 2F_{+-+}\otimes\mathcal{I}\otimes F_{-+-} + 2F_{+--}\otimes\mathcal{I}\otimes F_{-++} + \\
& + 2(\mathcal{I}\otimes T_{(1)1}\otimes T_{(1)1} + \mathcal{I}\otimes T_{(1)2}\otimes T_{(1)2} + \mathcal{I}\otimes T_{(1)3}\otimes T_{(1)3}) + \\
& + 2\boldsymbol{\alpha}(\mathcal{I}\otimes T_{(2)1}\otimes T_{(2)1} + \mathcal{I}\otimes T_{(2)2}\otimes T_{(2)2} + \mathcal{I}\otimes T_{(2)3}\otimes T_{(2)3}) - \\
& - 2(\boldsymbol{\alpha}+1)(\mathcal{I}\otimes T_{(3)1}\otimes T_{(3)1} + \mathcal{I}\otimes T_{(3)2}\otimes T_{(3)2} + \mathcal{I}\otimes T_{(3)3}\otimes T_{(3)3}) + \\
& + 2\mathcal{I}\otimes F_{+++}\otimes F_{---} - 2\mathcal{I}\otimes F_{++-}\otimes F_{--+} - \\
& - 2\mathcal{I}\otimes F_{+-+}\otimes F_{-+-} + 2\mathcal{I}\otimes F_{+--}\otimes F_{-++}.
\end{aligned} \tag{40}$$

3.2.1. Симметричная часть. Для симметричной части $\widehat{C}_{[3]}$ оператора $\widehat{C}_{(3)}$ способом, аналогичным использованному в случае $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$, получаем тождество

$$\widehat{C}_{[3]}^2(\widehat{C}_{[3]}-\alpha)(\widehat{C}_{[3]}-\beta)(\widehat{C}_{[3]}-\gamma)(\widehat{C}_{[3]}+3\alpha)(\widehat{C}_{[3]}+3\beta)(\widehat{C}_{[3]}+3\gamma)\,\mathrm{P}_{[3]} = 0, \tag{41}$$

которое согласуется с (16) при $t=0$. Отметим, что собственному значению 0 оператора $\widehat{C}_{[3]}$ соответствует его обобщенное собственное, а не собственное подпространство, таким образом, данное представление не является неприводимым или вполне приводимым.

Выражения для проекторов $\mathrm{P}_{a_i}^{[3]}$ на (обобщенные) собственные подпространства оператора $\widehat{C}_{[3]}$ и их суперследов получаются аналогично случаю $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$. Окончательно для суперследов проекторов имеем

$$\begin{gathered}
\operatorname{str}\mathrm{P}_0^{[3]} = 1, \\
\operatorname{str}\mathrm{P}_\alpha^{[3]} = \operatorname{str}\mathrm{P}_\beta^{[3]} = \operatorname{str}\mathrm{P}_\gamma^{[3]} = \operatorname{str}\mathrm{P}_{-3\alpha}^{[3]} = \operatorname{str}\mathrm{P}_{-3\beta}^{[3]} = \operatorname{str}\mathrm{P}_{-3\gamma}^{[3]} = 0.
\end{gathered} \tag{42}$$

Соотношения (42) также согласуются с выражениями, полученными в работе [12].

3.2.2. Антисимметричная часть. Для антисимметричной части $\widehat{C}_{[1^3]}$ оператора $\widehat{C}_{(3)}$ получаем

$$\widehat{C}^2_{[1^3]}(\widehat{C}_{[1^3]}+\alpha)(\widehat{C}_{[1^3]}+\beta)(\widehat{C}_{[1^3]}+\gamma)\,\mathrm{P}_{[1^3]}=0, \tag{43}$$

что согласуется с (17) при $t=0$.

Выражения для суперследов проекторов $\mathrm{P}^{[1^3]}_{a_i}$ на (обобщенные) собственные подпространства оператора $\widehat{C}_{[1^3]}$ имеют вид

$$\operatorname{str}\mathrm{P}^{[1^3]}_0=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[1^3]}_{-\alpha}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[1^3]}_{-\beta}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[1^3]}_{-\gamma}=0. \tag{44}$$

Соотношения (44) также согласуются с выражениями (19), полученными в работе [12] для классических алгебр Ли.

3.2.3. Часть [2,1]. Для $\widehat{C}_{[21]}$ аналогичным образом получаем

$$\widehat{C}^2_{[21]}(\widehat{C}_{[21]}-\alpha)(\widehat{C}_{[21]}-\beta)(\widehat{C}_{[21]}-\gamma)(\widehat{C}_{[21]}+\alpha)(\widehat{C}_{[21]}+\beta)(\widehat{C}_{[21]}+\gamma)\times \\ \times\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\beta\right)\left(\widehat{C}_{[21]}+\frac{3}{2}\gamma\right)\mathrm{P}_{[21]}=0, \tag{45}$$

что согласуется с тождествами (18).

Следы проекторов $\mathrm{P}^{[21]}_{a_i}$ на (обобщенные) собственные подпространства оператора $\widehat{C}_{[21]}$ равны

$$\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_0=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{\alpha}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{\beta}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{\gamma}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\alpha}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\beta}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\gamma}= \\ =\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\frac{3}{2}\alpha}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\frac{3}{2}\beta}=\operatorname{str}\mathrm{P}^{[21]}_{-\frac{3}{2}\gamma}=0. \tag{46}$$

Соотношения (46) также согласуются с выражениями (19), полученными в работе [12] для классических алгебр Ли.

Благодарности. Автор приносит благодарность А. П. Исаеву и С. О. Кривоносу за полезные обсуждения и замечания, а также сотрудникам кластера HybriLIT за предоставление вычислительных ресурсов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00311).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frappat L., Sciarrino A., Sorba P.* Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras. HAL. 2000.
2. *Chari V., Pressley A. N.* A Guide to Quantum Groups. Cambridge Univ. Press, 1995.
3. *Ma Z.* Yang–Baxter Equation and Quantum Enveloping Algebras. World Sci., 1993.
4. *van Ritbergen T., Schellekens A. N., Vermaseren J. A. M.* Group Theory Factors for Feynman Diagrams // Intern. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 41–96.
5. *Kac V.* Classifcation of Simple Z-Graded Lie Superalgebras and Simple Jordan Superalgebras // Commun. Algebra. 1977. V. 5. P. 1375–1400.
6. *Scheunert M.* The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. Springer, 2006.

7. *Vogel P.* The Universal Lie Algebra. 1999. https://webusers.imj-prg.fr/ pierre.vogel/grenoble-99b.pdf.
8. *Mkrtchyan R. L., Sergeev A. N., Veselov A. P.* Casimir Eigenvalues for Universal Lie Algebra // J. Math. Phys. 2012. V. 53. P. 102–106.
9. *Kac V.* A Sketch of Lie Superalgebra Theory // Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 31–64.
10. *Kac V.* Lie Superalgebras // Adv. Math. 1977. V. 26. P. 8–96.
11. *Isaev A. P., Provorov A. A.* Split Casimir Operator and Solutions of the Yang–Baxter Equation for the $osp\,(M|N)$ and $sl\,(M|N)$ Lie Superalgebras, Higher Casimir Operators, and the Vogel Parameters // Theor. Math. Phys. 2022. V. 210. P. 224–260.
12. *Isaev A. P., Krivonos S. O., Provorov A. A.* Split Casimir Operator for Simple Lie Algebras in the Cube of ad-Representation and Vogel Parameters // Intern. J. Mod. Phys. A. 2023. V. 38. P. 2350037.
13. *Исаев А. П., Рубаков В. А.* Теория групп и симметрий. Представления групп Ли и алгебр Ли. Приложения. Дубна, 2019.
14. *Isaev A. P., Krivonos S. O.* Split Casimir Operator for Simple Lie Algebras, Solutions of Yang–Baxter Equations, and Vogel Parameters // J. Math. Phys. 2021. V. 62. P. 083503; https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/doi/10.1063/5.0049055/15981606/083503_1_online.pdf. https://doi.org/10.1063/5.0049055. 2021.
15. *Mkrtchyan R. L., Veselov A. P.* Universality in Chern–Simons Theory // JHEP. 2012. V. 2012. P. 1–12.

Получено 26 февраля 2024 г.