

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДОМ РЕPPER-ПОТ

Н. Ю. Казаринов, В. И. Казача

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Показана возможность восстановления функции распределения частиц в любой точке четырехмерного поперечного фазового объема $\{x, x', y, y'\}$ по результатам измерений с помощью метода реpper-pot. Предлагаемая методика обработки экспериментальных результатов основывается на предположении, что установлено взаимно-однозначное соответствие между отверстиями в маске и их изображением на экране. Такого рода предварительная калибровка должна быть проведена экспериментально на измеряемом пучке ионов. Для восстановления функции распределения используется метод моментов. Применение полиномов Лежандра для обработки экспериментальных результатов позволяет свести задачу к цепочке рекуррентных соотношений. Численное моделирование процесса измерения показало, что точность восстановления функции распределения частиц составляет величину порядка $\pm 10\%$.

Possibility of reconstruction of the particle distribution function in any point of the four-dimensional phase space $\{x, x', y, y'\}$ according to results of measurements by the pepper-pot method is shown. The proposed method of the experimental results processing is based on the assumption that the one-one mapping between holes in the mask and their images on the screen is established. The moments method is used for reconstruction of distribution function. Application of the Legendre polynomials for processing the experimental results allows reducing the problem to recursive formulae. The numerical simulation of the measuring process showed that the accuracy of reconstruction of the particle distribution function amounted to the value about 10%.

PACS: 29.85-c

ВВЕДЕНИЕ

Величина поперечного эмиттанса является одной из важнейших характеристик пучка заряженных частиц. Существует много способов измерения эмиттанса (см., например, обзоры [1, 2]). Одним из них является измерение эмиттанса с помощью методики реpper-pot, заключающейся в том, что на пути пучка заряженных частиц помещается маска с отверстиями и измеряются характеристики пучка по его изображению на флуоресцентном экране, расположенном на некотором выбранном расстоянии от маски L [3] (рис. 1).

Образы отверстий маски передаются с экрана на содержащую пиксели чувствительную пластину CCD-камеры. Каждый пиксель имеет точно определенные координаты на $\{x, y\}$ -плоскости. Обычно одно пятно покрывает от 500 до 3000 пикселей [4]. Это

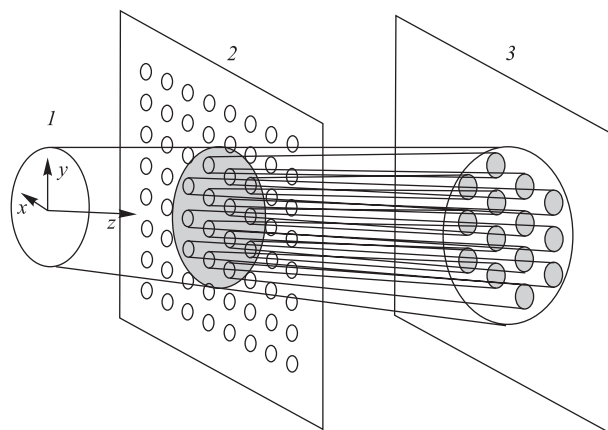


Рис. 1. Схема устройства pepper-pot: 1 — пучок ионов; 2 — маска; 3 — экран

зависит от размера пятна и разрешающей способности CCD-камеры. Затем с каждого пикселя считывается сигнал, пропорциональный числу попавших в данную точку частиц.

В настоящей работе показана возможность восстановления по результатам измерений этим методом функции распределения частиц в любой точке четырехмерного поперечного фазового объема $\{x, x', y, y'\}$.

Расчеты проводились с ансамблем, состоявшим из $5 \cdot 10^6$ частиц, параметры которых разыгрывались в четырехмерном фазовом пространстве случайным образом согласно распределению Гаусса. Диаметр пучка перед маской был равен 2 см, RMS-эмиттанс $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 25\pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$, $-0,02 \leq x', y' \leq 0,02$. Параметры Твисса $\beta = 100$ см и $\alpha = -1$. Начальные распределения частиц на плоскостях $\{x, y\}$ и $\{x, x'\}$ приведены на рис. 2 и 3 соответственно.

Считалось, что маска имеет 49 отверстий диаметром $d = 0,5$ мм, центры которых расположены на осях X и Y с интервалами $D = 3$ мм (координаты центров отверстий \bar{x}_0 и \bar{y}_0 изменяются от $-0,9$ до $+0,9$ мм). Расстояние между маской и экраном L вы-

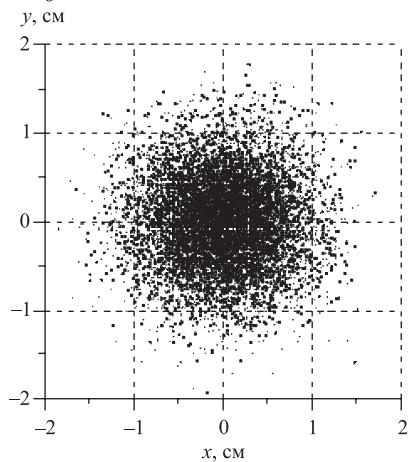


Рис. 2. Плоскость $\{x, y\}$

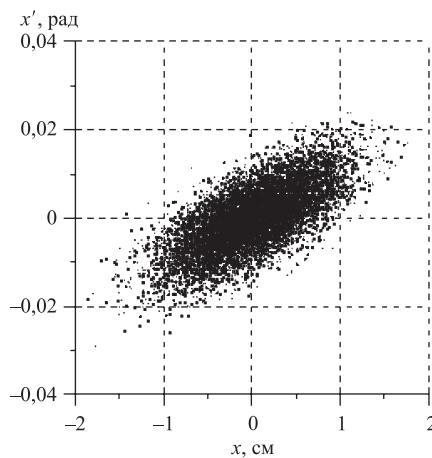


Рис. 3. Плоскость $\{x, x'\}$

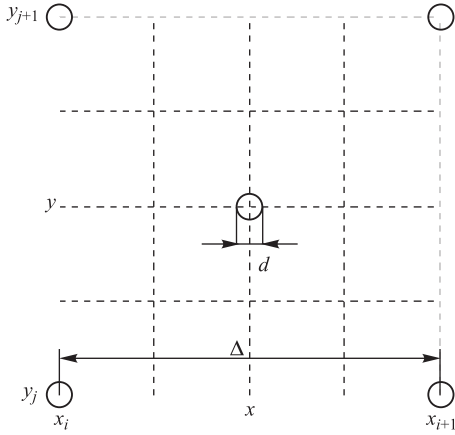
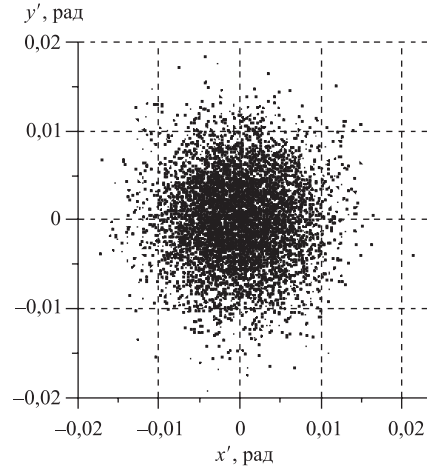


Рис. 4. Участок маски

Рис. 5. Плоскость $\{x', y'\}$

биралось равным 10 см, так чтобы изображения отверстий на экране не перекрывались. На рис. 4 показан участок маски с четырьмя отверстиями (x_i, y_j) , (x_i, y_{j+1}) , (x_{i+1}, y_{j+1}) и (x_{i+1}, y_j) . На рис. 5 дано распределение частиц на фазовой плоскости $\{x', y'\}$, рассчитанное для частиц, прошедших через центральное отверстие в маске ($\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0$).

Предлагаемая далее методика обработки экспериментальных результатов основывается на предположении, что установлено взаимно-однозначное соответствие между отверстиями в маске и их изображением на экране. Такого рода предварительная калибровка должна быть проведена экспериментально на измеряемом пучке ионов.

ПЛОТНОСТЬ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В эксперименте для каждого отверстия в маске известна плотность прошедших частиц $F(x, y)$ на экране. Тогда минимальные x'_{\min} , y'_{\min} и максимальные x'_{\max} , y'_{\max} углы для распределения $F(x, y)$ оцениваются как $x'_{\min} = \frac{x_{\min} - \bar{x}_0}{L}$, $x'_{\max} = \frac{x_{\max} - \bar{x}_0}{L}$, $y'_{\min} = \frac{y_{\min} - \bar{y}_0}{L}$ и $y'_{\max} = \frac{y_{\max} - \bar{y}_0}{L}$.

Неизвестное распределение по скоростям числа частиц, проходящих через отверстие с координатами центра \bar{x}_{0i} и \bar{y}_{0j} , будем искать в виде суммы произведений полиномов Лежандра:

$$\rho(x', y') = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M A_{ij} P_i \left(\frac{x' - \frac{x'_{\max} + x'_{\min}}{2}}{\frac{x'_{\max} - x'_{\min}}{2}} \right) P_j \left(\frac{y' - \frac{y'_{\max} + y'_{\min}}{2}}{\frac{y'_{\max} - y'_{\min}}{2}} \right), \quad (1)$$

$$x'_{\max} \leq x' \leq x'_{\min}, \quad y'_{\min} \leq y' \leq y'_{\max}.$$

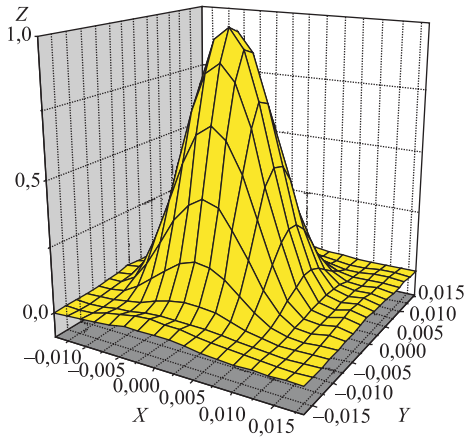


Рис. 6. Восстановленная функция $\rho(x', y')$

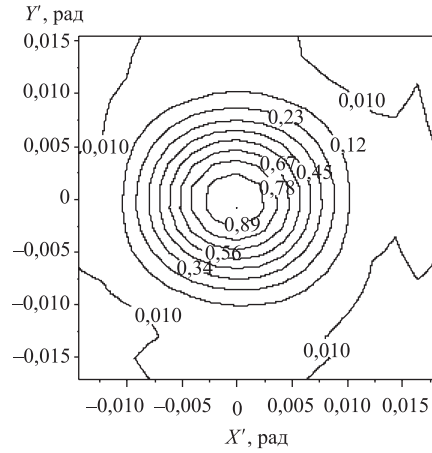


Рис. 7. Линии равного уровня

Коэффициенты A_{ij} находятся из условия совпадения моментов распределения (1) с моментами $(x')^n \cdot (y')^m$, вычисленными по экспериментально измеренной плотности частиц на экране:

$$\overline{(x')^n \cdot (y')^m} = \int_{x'_{\min}}^{x'_{\max}} \int_{y'_{\min}}^{y'_{\max}} (x')^n (y')^m \rho(x', y') dx' dy', \quad n = 0, 1, \dots, N_L, \quad m = 0, 1, \dots, M_L. \quad (2)$$

Здесь N_L и M_L — максимальные выбранные порядки полиномов Лежандра в (1); $(x')^n \cdot (y')^m$ — моменты скоростей частиц n -го и m -го порядков. Метод решения системы уравнений (2) изложен в приложении 1. Методика расчетов моментов $(x')^n \cdot (y')^m$ приведена в приложении 2. Использование моментов для определения параметров распределения $\rho(x', y')$ позволяет минимизировать влияние измерительных шумов.

На рис. 6 показана восстановленная для центрального отверстия в маске функция $\rho(x', y')$ (в относительных единицах). При этом $N_L = M_L = 8$, т.е. использовался 81 коэффициент A_{ij} . На рис. 7 показаны линии равного уровня, рассчитанные для функции, представленной на рис. 6.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

По результатам измерений можно восстановить угловое распределение частиц $\rho(x', y')$ в любой произвольной точке с координатами $\{x, y\}$ и, следовательно, функцию распределения в четырехмерном фазовом пространстве.

На рис. 4 показано расположение четырех соседних отверстий в маске с координатами $\{x_i, y_j\}$, $\{x_i, y_{j+1}\}$, $\{x_{j+1}, y_j\}$ и $\{x_{i+1}, y_{j+1}\}$, для которых найдены матрицы коэффициентов $A_{nm}^{(i,j)}$, $A_{nm}^{(i,j+1)}$, $A_{nm}^{(i+1,j)}$ и $A_{nm}^{(i+1,j+1)}$. Все коэффициенты $A_{nm}^{(i,j)}$ необходимо

умножить на N_{ij}/N_{\max} , где N_{ij} — число частиц, прошедших через данное отверстие, а $N_{\max} = \max_{i,j} \{N_{ij}\}$ — максимальное число частиц, прошедших через одно отверстие маски.

Матрица коэффициентов $A_{nm}(x, y)$ для точки с произвольными координатами $\{x, y\}$, находящейся внутри прямоугольника, обозначенного четырьмя выбранными отверстиями (см. рис. 4), находится интерполяцией полученных коэффициентов $A_{nm}^{(i,j)}$.

На первом шаге находятся промежуточные матрицы $A_{nm}(x_i, y)$ и $A_{nm}(x_{i+1}, y)$ по формулам

$$A_{nm}(x_i, y) = A_{nm}^{(i,j)} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + A_{nm}^{(i,j+1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \quad (3)$$

и

$$A_{nm}(x_{i+1}, y) = A_{nm}^{(i+1,j)} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + A_{nm}^{(i+1,j+1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}. \quad (4)$$

На втором шаге матрица коэффициентов $A_{nm}(x, y)$ получается из формулы

$$A_{nm}(x, y) = A_{nm}(x_i, y) \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + A_{nm}(x_{i+1}, y) \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}. \quad (5)$$

Минимальные $x'_{\min}(x, y)$, $y'_{\min}(x, y)$ и максимальные $x'_{\max}(x, y)$, $y'_{\max}(x, y)$ углы также вычисляются по интерполяционным формулам (3)–(5). На рис. 8 представлен график функции $\rho(x', y')$, построенной с помощью интерполирования для точки $x = 0,15$ см и $y = 0,15$ см. При этом были предварительно восстановлены зависимости $\rho(x', y')$ в точках $\{0, 0\}$, $\{0, 0,3\}$, $\{0,3, 0\}$ и $\{0,3, 0,3\}$.

На рис. 9 приведена функция $\rho(x', y')$, полученная с помощью программы восстановления для той же самой точки с координатами $\{0,15, 0,15\}$. Сравнение значений этих двух функций показало, что в области вершины графиков они совпадают с точностью $\sim \pm 1,5\%$, а к периферии распределений они совпадают с точностью $\sim \pm 10\%$.

Таким образом, функцию распределения частиц в произвольной точке четырехмерного фазового пространства (с точностью до постоянного множителя) можно представить

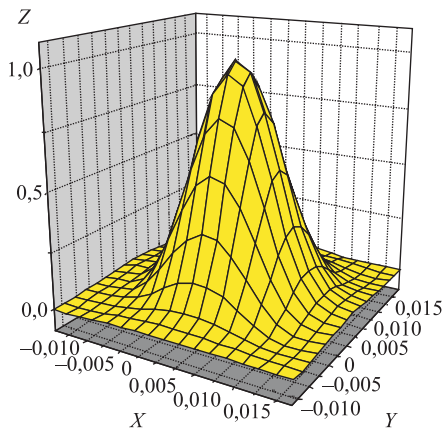


Рис. 8. График функции $\rho(x', y')$, построенный с помощью интерполирования

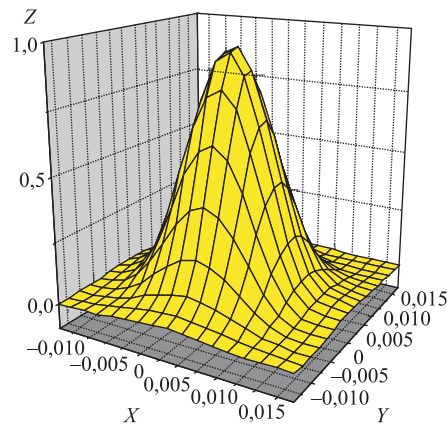


Рис. 9. График функции $\rho(x', y')$, полученный с помощью программы восстановления

в виде

$$f(x, y, x', y') = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{N_L} \sum_{m=0}^{M_L} A_{nm}(x, y) P_n(z) P_m(t), \quad (6)$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}; \quad x'_{\min}(x, y) \leq x' \leq x'_{\max}(x, y);$$

$$y'_{\min}(x, y) \leq y' \leq y'_{\max}(x, y).$$

Здесь $a = d/2$ — радиус отверстия в маске, а переменные z и t связаны с x' и y' согласно (П1.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение метода моментов позволяет восстановить из результатов измерений, полученных с помощью методики pepper-pot, распределение пучка на плоскости углов $\{x', y'\}$ для любого отверстия в маске.

Использование моментов позволяет уменьшить влияние измерительных шумов.

Четырехмерная функция распределения может быть восстановлена с помощью интерполяции распределений, полученных для дискретного набора отверстий.

Применение полиномов Лежандра для обработки экспериментальных результатов позволяет избежать решения системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей и свести задачу к цепочке рекуррентных соотношений.

Данная методика может быть рекомендована для технической реализации в Лаборатории ядерных реакций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van Steenbergen A.* Evaluation of Particle Beam Phase Space Measurement Techniques // Nucl. Instr. Meth. 1967. V. 51. P. 245–253.
2. *Le Jeune C., Aubert J.* Emittance and Brightness Definitions and Measurements. N. Y.: Acad. Press, 1980. 159 p.
3. *Yamazaki Y. et al.* High-Precision Pepper-Pot Technique for a Low-Emittance Electron Beam. KEK Preprint 92-59 A. 1992. 11 p.
4. *Kremers H.R. et al.* The KVI-4D Emittance Meter // Proc. of ECRIS08, Chicago, IL, USA, 2008. P. 204–207.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для изменения пределов интегрирования в (2) от -1 до $+1$ произведем следующую замену переменных

$$z = \frac{x' - \frac{x'_{\max} + x'_{\min}}{2}}{\frac{x'_{\max} - x'_{\min}}{2}} \quad \text{и} \quad t = \frac{y' - \frac{y'_{\max} + y'_{\min}}{2}}{\frac{y'_{\max} - y'_{\min}}{2}}. \quad (\text{П1.1})$$

Тогда система уравнений (2) преобразуется к виду

$$\overline{(x')^n \cdot (y')^m} = \left(\frac{x'_{\max} - x'_{\min}}{2} \right)^{n+1} \left(\frac{y'_{\max} - y'_{\min}}{2} \right)^{m+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (z + \kappa_x)^n (t + \kappa_y)^m \times \\ \times \left[\sum_{i=0}^{N_L} \sum_{j=0}^{M_L} A_{ij} P_i(z) P_j(t) \right] dz dt. \quad (\text{П1.2})$$

Здесь $\kappa_x = \frac{x'_{\max} + x'_{\min}}{x'_{\max} - x'_{\min}}$ и $\kappa_y = \frac{y'_{\max} + y'_{\min}}{y'_{\max} - y'_{\min}}$. Выражение $(z + \kappa_x)^n$ и $(t + \kappa_y)^m$ в (П1.2) в общем виде может быть представлено как

$$(z + \kappa_x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \kappa_x^{n-k} \text{ и } (t + \kappa_y)^m = \sum_{l=0}^m C_m^l t^l \kappa_y^{m-l}, \quad (\text{П1.3})$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \quad (\text{П1.4})$$

Связь между z^k и t^l в (П1.3) и полиномами Лежандра

$$z^k = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} P_i(z) \text{ и } t^l = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{(l)} P_j(t) \quad (\text{П1.5})$$

может быть найдена с помощью рекуррентной формулы

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_{i-1}^{(k)} \frac{i}{2i-1} + \alpha_{i+1}^{(k)} \frac{i+1}{2i+3}, \quad (\text{П1.6})$$

полученной с использованием известного свойства полиномов Лежандра

$$z P_i(z) = \frac{i+1}{2i+1} P_{i+1}(z) + \frac{i}{2i+1} P_{i-1}(z). \quad (\text{П1.7})$$

Начальные значения коэффициентов $\alpha_i^{(0)}$ определяются из условия $P_0(z) = 1$. Поэтому имеем $\alpha_0^{(0)} = 1$, а все остальные $\alpha_i^{(0)} = 0$. После чего выражение (П1.6) позволяет вычислить все требуемые зависимости (П1.5).

С использованием (П1.3) и (П1.5) система уравнений (П1.2) может быть переписана в виде

$$\overline{(x')^n \cdot (y')^m} = \left(\frac{x'_{\max} - x'_{\min}}{2} \right)^{n+1} \left(\frac{y'_{\max} - y'_{\min}}{2} \right)^{m+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M A_{ij} P_i(z) P_j(t) \right] \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^n C_n^k \kappa_x^{n-k} \sum_{p=0}^k \alpha_p^{(k)} P_p(z) \right] \left[\sum_{l=0}^m C_m^l \kappa_y^{m-l} \sum_{q=0}^l \alpha_q^{(l)} P_q(t) \right] dz dt. \quad (\text{П1.8})$$

С учетом ортогональности полиномов Лежандра на интервале $[-1, +1]$ система уравнений (П1.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \overline{(x')^n \cdot (y')^m} \left(\frac{2}{x'_{\max} - x'_{\min}} \right)^{n+1} \left(\frac{2}{y'_{\max} - y'_{\min}} \right)^{m+1} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_{ij} \|P_i\|^2 \|P_j\|^2 \times \\ &\times \left(\sum_{k=i}^n \alpha_i^{(k)} C_n^k \kappa_x^{n-k} \right) \left(\sum_{l=j}^m \alpha_j^{(l)} C_m^l \kappa_y^{m-l} \right), \quad (\text{П1.9}) \end{aligned}$$

где $\|P_i\|^2 = \frac{2}{i+1}$ — норма полиномов Лежандра.

Из (П1.9) можно получить следующую рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов A_{nm} ($n = 1, 2, \dots, N$ и $m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \left[\overline{(x')^n \cdot (y')^m} \left(\frac{2}{x'_{\max} - x'_{\min}} \right)^{n+1} \left(\frac{2}{y'_{\max} - y'_{\min}} \right)^{m+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{ij} \|P_i\|^2 \|P_j\|^2 \times \right. \\ &\times \left. \left(\sum_{k=i}^n \alpha_i^{(k)} C_n^k \kappa_x^{n-k} \right) \left(\sum_{l=j}^m \alpha_j^{(l)} C_m^l \kappa_y^{m-l} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} A_{im} \|P_i\|^2 \|P_m\|^2 \left(\sum_{k=i}^n \alpha_i^{(k)} C_n^k \kappa_x^{n-k} \right) \alpha_m^{(m)} - \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{m-1} A_{nj} \|P_n\|^2 \|P_j\|^2 \left(\sum_{l=j}^m \alpha_j^{(l)} C_m^l \kappa_y^{m-l} \right) \alpha_n^{(n)} \right] [\alpha_n^{(n)} \alpha_m^{(m)} \|P_n\|^2 \|P_m\|^2]^{-1}. \quad (\text{П1.10}) \end{aligned}$$

Из рекуррентной формулы (П1.10) с учетом (П1.6) получаем цепочку связанных между собой соотношений для вычисления коэффициентов A_{nm} . Для $n = m = 0$ находим величину коэффициента A_{00} ,

$$A_{00} = \frac{1}{x'_{\max} - x'_{\min}} \frac{1}{y'_{\max} - y'_{\min}}. \quad (\text{П1.11})$$

Для того чтобы можно было воспользоваться рекуррентной формулой (П1.10), нужно также вычислить коэффициенты A_{n0} ($n = 1, 2, \dots, N_L$) и A_{0m} ($m = 1, 2, \dots, M_L$) по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} A_{n0} &= \frac{\overline{(x')^n} \left(\frac{2}{x'_{\max} - x'_{\min}} \right)^{n+1} \left(\frac{2}{y'_{\max} - y'_{\min}} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} A_{i0} \|P_i\|^2 \|P_0\|^2 \left(\sum_{k=i}^n \alpha_i^{(k)} C_n^k \kappa_x^{n-k} \right)}{\alpha_n^{(n)} \|P_n\|^2 \|P_0\|^2}, \\ A_{0m} &= \frac{\overline{(y')^m} \left(\frac{2}{x'_{\max} - x'_{\min}} \right) \left(\frac{2}{y'_{\max} - y'_{\min}} \right)^{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1} A_{0j} \|P_0\|^2 \|P_j\|^2 \left(\sum_{l=j}^m \alpha_j^{(l)} C_m^l \kappa_y^{m-l} \right)}{\alpha_m^{(m)} \|P_0\|^2 \|P_m\|^2}. \quad (\text{П1.12}) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для расчета моментов $\overline{(x')^n \cdot (y')^m}$ воспользуемся соотношениями

$$x' = \frac{(x - \bar{x}_0) - (x_0 - \bar{x}_0)}{L} \quad \text{и} \quad y' = \frac{(y - \bar{y}_0) - (y_0 - \bar{y}_0)}{L}. \quad (\text{П2.1})$$

Тогда приближенное выражение для расчета моментов скоростей частиц, прошедших через произвольное отверстие, имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{(x')^n (y')^m} &= \frac{\overline{[(x - \bar{x}_0) - (x_0 - \bar{x}_0)]^n \cdot [(y - \bar{y}_0) - (y_0 - \bar{y}_0)]^m}}{L^{n+m}} = \\ &= \frac{1}{L^{n+m}} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k (x - \bar{x}_0)^k (x_0 - \bar{x}_0)^{n-k} \right] \left[\sum_{l=0}^m C_m^l (y - \bar{y}_0)^l (y_0 - \bar{y}_0)^{m-l} \right] = \\ &= \frac{1}{L^{n+m}} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m C_n^k C_m^l (x - \bar{x}_0)^k (y - \bar{y}_0)^l (x_0 - \bar{x}_0)^{n-k} (y_0 - \bar{y}_0)^{m-l} \right], \quad (\text{П2.2}) \end{aligned}$$

где

$$\overline{(x - \bar{x}_0)^k (y - \bar{y}_0)^l} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_0)^k (y_i - \bar{y}_0)^l}{N}. \quad (\text{П2.3})$$

Здесь N — число частиц, прошедших через отверстие в маске. При обработке экспериментальных данных суммирование по частицам в формуле (П2.3) должно быть заменено на суммирование сигналов на пикселях соответствующего изображения на экране:

$$\overline{(x - \bar{x}_0)^k \cdot (y - \bar{y}_0)^l} = \frac{\sum_{i=1}^N I_i (x_i - \bar{x}_0)^k (y_i - \bar{y}_0)^l}{\sum_{i=1}^N I_i}, \quad (\text{П2.4})$$

где I_i — величина сигнала на пикселе.

Поскольку отверстия очень малы по сравнению с диаметром пучка, можно считать, что частицы распределены равномерно по площади отверстия. Тогда моменты $\overline{(x_0 - \bar{x}_0)^n}$, входящие в (П2.2), могут быть вычислены по формуле

$$\overline{(x_0 - \bar{x}_0)^n} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^{n+1} dr \right) (\cos \varphi)^n d\varphi = \frac{2a^n}{(n+2)} \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n)!!} & (n = 2, 4, \dots), \\ 0 & (n = 1, 3, \dots) \end{cases} \quad (\text{П2.5})$$

и аналогичной формуле для момента $\overline{(y_0 - \bar{y}_0)^m}$.