

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛера

А. Е. Дубинов

ФГУП «Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной физики»,
Саров, Нижегородская обл., Россия

И. Н. Галидакис

Университет Крита, Ираклион, Греция

Решение уравнения Кеплера выражено через гиперфункцию Ламберта. Такое представление позволяет, в частности, использовать численные алгоритмы определения значений этой функции (например, соответствующую Maple-процедуру) для нахождения численных решений исходного уравнения Кеплера.

A new explicit solution of the Kepler transcendental equation for parameters of elliptic motion is proposed. The solution is based on the Lambert hyper-functions. Calculation of these functions, for example, by making use of Maple package, enables one to obtain efficiently the numerical solution of the Kepler equation.

PACS: 02.30.Gp
02.60.Cb; 95.10.Ce

ВВЕДЕНИЕ

Трансцендентное уравнение Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалию эллиптического движения E , среднюю аномалию M и эксцентриситет ε ,

$$E - \varepsilon \sin E = M \quad (1)$$

имеет исключительную важность в гравитационной механике. Кратко напомним основное физическое содержание этого уравнения. Изобразим на рис. 1 эллипс с эксцентриситетом ε — орбиту движущегося тела, которое вращается вокруг неподвижного гравитирующего центра, находящегося в фокусе эллипса O . Обозначим буквами C и Π центр и перигицентр эллипса соответственно. Построим также окружность с центром в точке O и радиусом, равным большой полуоси эллипса. Пусть в некий момент времени положение вращающегося тела определяется точкой P . Опустим перпендикуляр из P на большую ось эллипса и обозначим основание перпендикуляра буквой N . Продолжим этот перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке P' . Тогда угол $\angle PCP'$ и есть эксцентрическая аномалия E .

Действительное движение тела по эллиптической орбите (точка P) и его видимое движение по круговой орбите (точка P') являются неравномерными, то есть угловая

скорость непостоянна. Однако мы можем приписать этим вращениям некую среднюю угловую скорость, выполнив усреднение за период. Тогда представим, что из перицентра Π одновременно с точками P и P' выходит точка P'' , которая вращается равномерно со средней угловой скоростью по окружности. Ее видимое положение определяется углом $\angle PCP''$, который называется средней аномалией M . Кеплер впервые показал, что E и M всегда связаны уравнением (1).

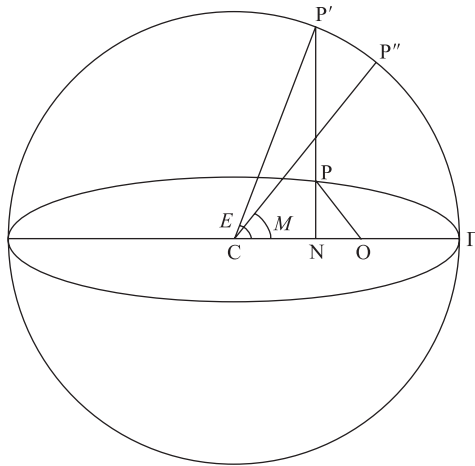


Рис. 1. Графическая иллюстрация физического содержания уравнения Кеплера

Долгое время считалось, что невозможно получить точное аналитическое решение уравнения Кеплера (т.е. разрешить это уравнение относительно E), несмотря на его кажущуюся простоту.

Однако постепенно находились некоторые формы точного решения, которые всегда были ценнее численных. В [1] представлена полная новых открытий и драматизма история поиска точных и приближенных решений уравнения Кеплера и используемые при этом аналитические и численные методы.

Так, например, имеются решения в виде рядов:

- по степеням ε [1]:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \text{ где } a_n = \frac{1}{n!2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1} \sin [(n-2k)M]; \quad (2)$$

- по функциям Бесселя от ε [1-3]:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin(nM). \quad (3)$$

С помощью метода, основанного на граничной задаче Римана, в [4] было получено интегральное выражение для корня уравнения (1) в виде

$$E = M - \varepsilon(M - \pi) \left[(\varepsilon + 1)^2 - \frac{2}{\pi} (M - \pi)^2 \int_0^1 F(t) dt \right], \quad (4)$$

где

$$F(t) = \operatorname{arctg} \frac{-2tC(t) \left(\varepsilon + \frac{\pi}{2}t \right)}{\left(\varepsilon + \frac{\pi}{2}t \right)^2 - (M - \pi)^2 t^2 - t^2 C(t)}, \quad C(t) = \log \left(\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} + \frac{1}{t} \right).$$

Попытки построения точных и приближенных решений уравнения (1) продолжаются и в наши дни [5, 6]¹.

Однако представленные выше, а также другие известные решения громоздки, трудны для анализа и вычислений: ряды в выражениях (2) и (3) плохо сходятся и требуют учета большого количества слагаемых, а интеграл в (4) имеет требующие дополнительного анализа особенности. Практическое использование формул (2)–(4) также представляется проблематичным.

Итак, несомненно представляет интерес поиск простых и удобных для численных расчетов формул, задающих корни уравнения Кеплера. Ниже представлена новая форма явного решения уравнения Кеплера. В ней использованы новые специальные функции — гиперфункции Ламберта, являющиеся обобщением получившей широкое распространение функции Ламберта $W(x)$ [7, 8].

1. ГИПЕРФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА

Семейство гиперфункций Ламберта $HW(\{f_i(x)\}_N; y)$ было введено в [9, 10] как естественное обобщение функции Ламберта $W(x)$, являющейся обратной к функции $y = x \exp x$. Цель их введения — решение математических задач, связанных с бесконечным экспоненцированием.

Дадим определение гиперфункциям Ламберта. Пусть имеется конечный набор действительных опорных функций $\{f_i(x)\}_N$. Тогда гиперфункция Ламберта есть функция, обратная к функции

$$y = x \exp(f_N(x) \exp(f_{N-1}(x) \exp(f_{N-2}(x) \dots)))^2. \quad (5)$$

Как показано, в [9, 10] гиперфункции Ламберта позволяют достаточно эффективно аналитически решать сложные трансцендентные уравнения типа уравнения $x \exp(x \exp x) = a$, имеющего решение в виде $x = HW(\{x, x, x\}_3; a)$.

В дальнейшем нам понадобится гиперфункция Ламберта с одной лишь опорной функцией $HW(\{f(x)\}_1; y)$.

Примеры. $HW(\{0\}_1; y) = y$; $HW(\{\ln x\}_1; y) = \pm\sqrt{y}$; $HW(\{x - \ln x\}_1; y) = \ln y$; $HW(\{x\}_1; y) = W(y)$.

Приведем для справки формулы дифференцирования и интегрирования $HW(\{f(x)\}_1; y)$, используя правила дифференцирования и интегрирования [11] для

¹Решение, представленное в [5], — ошибочное, что легко проверить его подстановкой в уравнение.

²В [10] используется обратный порядок нумерации опорных функций, нежели здесь и в [9].

обратных функций

$$\frac{d}{dy} HW(\{f(x)\}_1; y) = \frac{HW(\{f(x)\}_1; y)}{y \left[1 + HW(\{f(x)\}_1; y) \frac{df}{dx} \Big|_{x=y} \right]}; \quad (6)$$

$$\int HW(\{f(x)\}_1; y) dy = y HW(\{f(x)\}_1; y) - \int_{x=HW(\{f(x)\}_1; y)} x f(x) dx. \quad (7)$$

2. КАК ВЫЧИСЛЯТЬ ГИПЕРФУНКЦИЮ ЛАМБЕРТА

Перед тем как рассмотреть вопрос об удобстве в расчетах любой новой функции, напомним, что еще несколько десятилетий назад, в докомпьютерную эпоху, логарифмическая, показательная и тригонометрические функции, не говоря уже об общеупотребительных специальных функциях, были неудобны для вычислений.

Однако сейчас можно предложить несколько простых алгоритмов вычисления гиперфункции Ламберта. Все они основаны на вычислении обратной функции путем разложения ее в ряд Тейлора и последующего решения полиномиального уравнения, например, методом Ньютона. Примеры алгоритмов вычисления обратной функции приведены в [12–14]. Была разработана простая Марле-процедура, приведенная в [10], позволяющая вычислять, анализировать и строить графики гиперфункции с любым конечным набором опорных функций $\{f_i(x)\}_N$.

Основная трудность инвертирования функции заключается в том, что обратные функции немонотонных функций многозначны (т. е. имеют несколько ветвей) и необходимо вычислять значение функции с привязкой к конкретной ветви. Проблема селекции ветвей многозначной обратной функции в применении к уравнению Кеплера может быть решена, например, методом выделения единственной действительной ветви из множества комплексных.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

Перепишем уравнение Кеплера (1) в экспоненциальном виде

$$E \exp \left[\ln \left(1 - \frac{\varepsilon \sin E}{E} \right) \right] = M, \quad (8)$$

и тогда его решение есть

$$E = HW \left(\left\{ \ln \left(1 - \frac{\varepsilon \sin x}{x} \right) \right\}_1; M \right). \quad (9)$$

В справедливости полученного решения можно легко убедиться путем подстановки его в уравнение Кеплера (1).

При вычислении значения E для конкретных значений ε и M проблема селекции ветвей (уравнение (1) имеет бесконечное число комплексных решений и одно искомое действительное) решалась путем выделения единственной действительной ветви.

Использование разработанной Maple-процедуры [10] позволяет вычислять зависимость $E(M)$ при конкретных ε . Проверка показала, что корни уравнения Кеплера, вычисленные по формуле (3) при достаточно большом количестве членов этого ряда и по формуле (9) при достаточно большом количестве членов ряда Тейлора для обратной функции, полностью совпадают.

Полезно сравнить особенности вычисления искомого решения по формулам (3) и (9). Так как формула (3) представляет собой сумму тригонометрических слагаемых, амплитуда и период которых убывают с ростом номера n , то при вычислении небольшого количества членов ряда на кривой $E(M)$ заметны осцилляции, соответствующие слагаемому с максимальным номером (рис. 2, а). С увеличением количества слагаемых амплитуда этих осцилляций уменьшается, и кривая приближается к своему точному профилю.

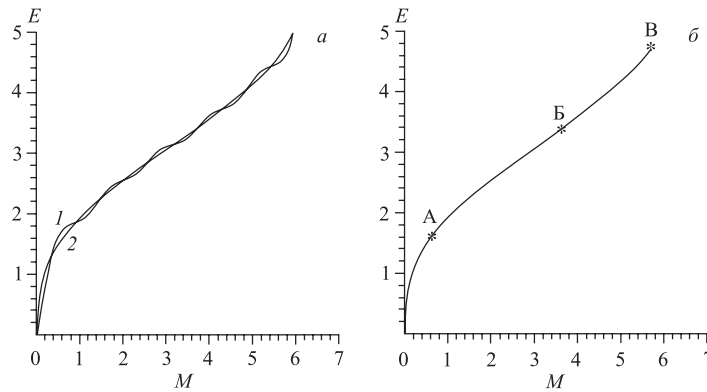


Рис. 2. Иллюстрация особенностей вычисления $E(M)$ при $\varepsilon = 0,99$ по формулам (3) (а) и (9) (б): 1, 2 — при числе членов ряда $n = 5$ и $n = 150$; (0, А) — участок совпадения при 15 членах ряда Тейлора, (0, В) — при 20, (0, В*) — при 25 членах ряда Тейлора

Совсем по-другому происходит приближение к своему точному профилю кривой, вычисляемой по формуле (9). С ростом количества членов ряда Тейлора для обратной функции растет длина участка, где имеется совпадение вычисленной кривой со своим точным профилем, а происходит это вокруг точки, вблизи которой было выполнено разложение в ряд Тейлора (точки $M = 0$ на рис. 2, б).

На практике также имеет большое значение быстрдействие процедур вычисления решения по формулам (3) и (9). Обычно (см., например, [15]) такое сравнение производят для конкретного процессора и конкретной системы компьютерной алгебры. Следуя [15], укажем, что на процессоре Intel Celeron (600 МГц, 256 МБ ОЗУ) в системе Maple-9 вычисление по формуле (3), например, для $n = 10$, когда имеются сильные осцилляции на кривой, требует 3,35 с, для $n = 50$, когда осцилляции еще заметны, — 6,59 с, а для $n = 150$, когда осцилляции уже не заметны, — 133,27 с процессорного времени. Такой быстрый рост времени расчета обусловлен необходимостью вычисления большого числа значений функций Бесселя.

Вычисление же по формуле (9) при 10 членах ряда Тейлора, когда длина участка совпадения заметно меньше заданного интервала ($M = 0-7$), занимает 5,39 с, а при

25 членах ряда, когда длина участка совпадения почти достигает длины интервала $M = 0-7$, — 24,84 с.

Таким образом, в работе предложен новый подход к решению уравнения Кеплера на основе гиперфункций Ламберта.

Выражаем благодарность Г. Гоннету за помощь в подборе литературы и Ю. Б. Кудасову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colwell P.* Solving Kepler's Equation over Three Centuries. Richmond: Willmann-Bell Inc., 1993.
2. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
3. *Аксенов Е. П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
4. *Siewert C. E., Burniston E. E.* An Exact Analytical Solution of Kepler's Equation // *Celestial Mechanics*. 1972. V. 6. P. 294.
5. *Шелаев И. А.* Решение уравнения Кеплера. Препринт ОИЯИ P2-2002-298. Дубна, 2002.
6. *Palacios M.* Improving the Solution of Kepler's Equation and Related Problems // *Monografías del Sem. Mat. «García de Galdeano»*. 2001. V. 21. P. 145–157.
7. *Corless R. M. et al.* On the Lambert W Function // *Adv. Comp. Math*. 1996. V. 5. P. 329–359.
8. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* W -функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства. Саров: СарФТИ, 2004.
9. *Galidakis I. N.* An Infinite Family of Lambert W -Like Functions and Their Use in Numerically Solving Exponential Tower Equations. <http://users.forthnet.gr/ath/igal/math/LWExtension.html>
10. *Galidakis I. N.* On Solving the p -th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // *Complex Variables*. 2005. V. 50, No. 13. P. 977–997.
11. *Parker F. D.* Integrals of Inverse Functions // *Am. Math. Month*. 1955. V. 62, No. 6. P. 439–440.
12. *Saks S., Sigmund A.* Analytical Functions. N. Y.: Hafner Publ. Comp., 1952.
13. *Salvy B.* Fast Computation of Some Asymptotic Functional Inverses // *J. Symbolic Computation*. 1999. V. 17. P. 227–236.
14. *Salvy B., Shackell J.* Symbolic Asymptotics: Multiseries of Inverse Functions // *Ibid.* V. 27. P. 543–563.
15. *Скорыходов С. Д.* Аппроксимации Паде и численный анализ дзета-функции Римана // *ЖВММФ*. 2003. Т. 43, №9. С. 1330–1352.

Получено 16 января 2006 г.