Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 3(159). С. 259–270

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПРОСТЫЕ БИНАРНЫЕ ЭФИРНЫЕ ОБЪЕКТЫ В СТО, ЭФИРНЫЙ ШАР И КРУГЛАЯ ЭФИРНАЯ ПЛАСТИНКА

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дается определение простого бинарного эфирного объекта и его границы в $(n+1)$-мерном псевдоевклидовом мире событий. Составляется система дифференциальных уравнений для границы в случае, когда внешние силы на объект не действуют. Подробно рассматриваются примеры: эфирный шар и круглая эфирная пластинка. Вычисляется их внутренняя энергия.

Definition is given for the simple binary aether object and its border in the $(n+1)$-dimensional pseudo-Euclidean world of events. The system of differential equations for the border is derived in the case when external forces do not act on the object. Detailed consideration is given to such examples as an aether sphere and a round aether plate. Calculation of their inner energy is performed.

PACS: 11.25.-w

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с работами [1–3] полагаем, что простой бинарный эфирный объект состоит из эфирной массы, ограниченной эфирной гиперпленкой. Весь объект рассматриваем в $(n+1)$-мерном псевдоевклидовом мире событий с метрикой Минковского

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -c^2\, dx^0 dx^0 + dx^1 dx^1 + \ldots + dx^n dx^n, \tag{1}$$

где c — скорость света; x^0 — время; $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты. На размерность мира накладываем условие $n \geqslant 2$.

В каждый момент времени $x^0 = t$ эфирная масса занимает в $(n+1)$-мерном мире Минковского n-мерную пространственноподобную односвязную область $\omega_n(t)$, ограниченную $(n-1)$-мерной областью $\omega_{n-1}(t)$, занимаемой эфирной гиперпленкой.

За все время своего существования эфирная масса заметает в мире Минковского $(n+1)$-мерную односвязную область Ω_{n+1}, ограниченную времениподобной мировой гиперповерхностью Ω_n, заметаемой эфирной гиперпленкой. Гиперповерхность Ω_n есть граница простого бинарного эфирного объекта.

Пересечение области Ω_{n+1} с гиперплоскостью $x^0 = t$ есть область $\omega_n(t)$, а пересечение гиперповерхности Ω_n с гиперплоскостью $x^0 = t$ есть область $\omega_{n-1}(t)$.

Пересечение области Ω_{n+1} с полосой $0 \leqslant x^0 \leqslant t$ обозначим через $\bar{\Omega}_{n+1}$, а пересечение гиперповерхности Ω_n с полосой $0 \leqslant x^0 \leqslant t$ — через $\bar{\Omega}_n$.

Действие простого бинарного эфирного объекта полагаем равным

$$S = G_{n-1} \int\limits_{\bar{\Omega}_n} dV_n + G_n \int\limits_{\bar{\Omega}_{n+1}} dV_{n+1}, \tag{2}$$

где dV_n — элемент площади поверхности $\bar{\Omega}_n$; dV_{n+1} — элемент объема области $\bar{\Omega}_{n+1}$. Обе константы взаимодействия G_n и G_{n+1} не равны нулю.

Если $G_n = 0$, то мы имеем дело с одинокой эфирной гиперпленкой, а не с бинарным объектом. Если $G_n = 0$, то мы имеем дело с одинокой эфирной массой, заметающей все пространство-время, а не с бинарным объектом (см. [3]). Если обе константы взаимодействия G_n и G_{n+1} равны нулю, то объект для рассмотрения отсутствует.

Вариация действия (2) равна

$$\delta S = G_{n-1} \int\limits_{\bar{\Omega}_n} \delta\, dV_n + G_n \int\limits_{\bar{\Omega}_{n+1}} \delta\, dV_{n+1}. \tag{3}$$

Условие $\delta S = 0$ эквивалентно выводимой здесь системе дифференциальных уравнений для границы Ω_n простого бинарного эфирного объекта, свободного от действия внешних сил.

1. ЭЛЕМЕНТ dV_{m+1} ПЛОЩАДИ $(m+1)$-МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЕГО ВАРИАЦИЯ

Если $(m+1)$-мерная времениподобная поверхность задается уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(u^0, u^1, \ldots, u^m), \tag{4}$$

то метрика (1) на ней принимает вид

$$ds^2 = f_{kl}\, du^k\, du^l, \quad \text{где} \quad f_{kl} = \eta_{\mu\nu} \xi^\mu_k \xi^\nu_l, \quad \xi^\mu_k = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}, \tag{5}$$

а элемент ее площади равняется

$$dV_{m+1} = \frac{1}{c} \sqrt{-f_m}\, du^0\, du^1 \cdots du^m, \quad \text{где} \quad f_m = \det\,(f_{kl}). \tag{6}$$

Всюду здесь тензорные латинские индексы принимают значения от 0 до m, а тензорные греческие индексы — 0 до n.

Чтобы найти вариацию $\delta\, dV_{m+1}$, заметим, что

$$\frac{\partial \sqrt{-f_m}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{-f_m}}{\partial \xi^\alpha_k} = \eta_{\alpha\nu} \sqrt{-f_m} f^{kl} \xi^\nu_l, \tag{7}$$

где матрица (f^{kl}) обратна к матрице (f_{kl}). Поэтому

$$\delta \sqrt{-f_m} = \eta_{\alpha\nu} \sqrt{-f_m} f^{kl} \xi^\nu_l \delta \xi^\alpha_k = \eta_{\alpha\nu} \sqrt{-f_m} f^{kl} \xi^\nu_l \frac{\partial}{\partial u^k} \delta x^\alpha. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\delta\sqrt{-f_m} = -\delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu) + \frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu \delta x^\alpha), \tag{9}$$

$$c\delta\, dV_{m+1} = -\delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu)\, du^0 du^1 \cdots du^m + \\ + \frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu \delta x^\alpha)\, du^0 du^1 \cdots du^m. \tag{10}$$

2. ЭЛЕМЕНТ dV_{n+1} ОБЪЕМА $(n+1)$-МЕРНОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО ВАРИАЦИЯ

При $m = n$ все сильно упрощается. В этом случае вместо уравнений (4) напишем уравнения

$$x^\alpha = f^\alpha(v^0, v^1, \ldots, v^n) \tag{11}$$

перехода от аффинных координат x^α к координатам v^κ криволинейным, а вместо производных ξ_k^μ введем производные

$$\zeta_\kappa^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial v^\kappa}. \tag{12}$$

Поэтому в случае $m = n$, во-первых,

$$f_{\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\zeta_\kappa^\mu\zeta_\lambda^\nu, \quad f_n = -c^2 J^2, \quad \frac{\sqrt{-f_n}}{c} = J = \det(\zeta_\lambda^\kappa), \tag{13}$$

а во-вторых,

$$f^{\kappa\lambda} = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\beta}, \quad \eta_{\alpha\nu} f^{\kappa\lambda}\zeta_\lambda^\nu = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в равенство (9), получаем

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\right) - \delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\right). \tag{15}$$

Последний результат можно получить и непосредственно: так как $\dfrac{\partial J}{\partial \zeta_\kappa^\alpha} = J\dfrac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}$, то $\delta J = J\dfrac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta\zeta_\kappa^\alpha$, откуда следует равенство (15).

Этот вывод основан на правиле дифференцирования определителей:

$$d|\zeta_\kappa^\nu| = Z_\nu^\kappa d\zeta_\kappa^\nu, \tag{16}$$

где Z_ν^κ — алгебраическое дополнение элемента ζ_κ^ν. В данном случае

$$Z_\nu^\kappa = J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\nu}. \tag{17}$$

Теперь докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\right) = 0. \tag{18}$$

Во-первых, имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)=\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\frac{\partial J}{\partial v^\kappa}+J\frac{\partial}{\partial v^\kappa}\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial J}{\partial x^\alpha}+J\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 v^\kappa}{\partial x^\mu\,\partial x^\alpha}.$$

Во-вторых, применяя правило (16) вместе с равенством (17), находим другое, а именно:

$$\frac{\partial J}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial J}{\partial \zeta^\mu_\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\zeta^\mu_\kappa=J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\zeta^\mu_\kappa=J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial v_\kappa}=-J\frac{\partial x^\mu}{\partial v_\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получаем равенство (18).

Подставляя равенство (18) в (15), получаем вариацию определителя J в следующем виде:

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\right). \tag{19}$$

Полагая $J>0$, находим элемент объема

$$dV_{n+1}=J\,dv^0\,dv^1\cdots dv^n=dx^0\,dx^1\cdots dx^n \tag{20}$$

и его вариацию

$$\delta dV_{n+1}=\frac{\partial}{\partial v^\kappa}\left(J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\right)dv^0\,dv^1\cdots dv^n. \tag{21}$$

3. ВАРИАЦИЯ ОБЪЕМА V_{n+1} ОБЛАСТИ $\bar\Omega_{n+1}$

Применяя интегральную теорему (Гаусса, Остроградского, Стокса) (см. [4–6]), на основании равенства (21) получаем вариацию

$$\delta V_{n+1}=\int\limits_{\bar\Omega_{n+1}}\delta\,dV_{n+1} \tag{22}$$

объема V_{n+1} области $\bar\Omega_{n+1}$ в виде интеграла по ее границе

$$\partial\bar\Omega_{n+1}=\bar\Omega_n\cup\omega_n(t)\cup\omega_n(0), \tag{23}$$

равной указанной сумме непересекающихся областей. Этот интеграл равен следующей сумме интегралов:

$$\delta V_{n+1}=\int\limits_{\bar\Omega_n}N_\kappa J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\,du^0\,du^1\cdots du^m+ \\ +\text{интеграл по области }\omega_n(t)\cup\omega_n(0). \tag{24}$$

Здесь и дальше $m=n-1$,

$$N_\kappa J\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha=\begin{vmatrix}\delta x^0 & \delta x^1 & \cdots & \delta x^n\\ \xi^0_0 & \xi^1_0 & \cdots & \xi^n_0\\ \xi^0_1 & \xi^1_1 & \cdots & \xi^n_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi^0_m & \xi^1_m & \cdots & \xi^n_m\end{vmatrix}. \tag{25}$$

4. ВАРИАЦИЯ ОБЪЕМА V_n ОБЛАСТИ $\bar{\Omega}_n$

Применяя ту же интегральную теорему, на основании равенства (10) получаем вариацию

$$\delta V_n = \int\limits_{\bar{\Omega}_n} \delta\, dV_n \tag{26}$$

объема V_n области $\bar{\Omega}_n$ в виде следующей суммы интегралов:

$$\delta V_n = -\frac{1}{c}\int\limits_{\bar{\Omega}_n} \delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial u^k}\big(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu\big)\, du^0\, du^1 \cdots du^m +$$
$$+ \text{интеграл по области } \omega_{n-1}(t) \cup \omega_{n-1}(0) = \partial\bar{\Omega}_n. \tag{27}$$

5. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГРАНИЦЫ РАССМАТРИВАЕМОГО ЭФИРНОГО ОБЪЕКТА

При выводе дифференциальных уравнений для границы рассматриваемого эфирного объекта интегралы на участках $x^0 = t$ и $x^0 = 0$ в счет не идут.

Согласно (3), (24) и (27) условие $\delta S = 0$ при произвольных вариациях δx^α на участке $0 < x^0 < t$ эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$G_{n-1}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m} f^{kl}\xi_l^\nu) = G_n \begin{vmatrix} \delta_\alpha^0 & \delta_\alpha^1 & \cdots & \delta_\alpha^n \\ \xi_0^0 & \xi_0^1 & \cdots & \xi_0^n \\ \xi_1^0 & \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_m^0 & \xi_m^1 & \cdots & \xi_m^n \end{vmatrix} \tag{28}$$

для границы Ω_n простого бинарного эфирного объекта в отсутствие внешних сил.

6. КРУГЛАЯ ЭФИРНАЯ ПЛАСТИНКА

В этом случае $n = 2, m = 1$. Решение будем искать в виде

$$x^0 = t = u^0, \quad x^1 = x = r(t)\cos\varphi, \quad x^2 = y = r(t)\sin\varphi, \quad \varphi = u^1. \tag{29}$$

На поверхности (29) метрика (1) равняется

$$ds^2 = (\dot{r}^2 - c^2)\, dt^2 + r^2\, d\varphi^2, \tag{30}$$

а элемент площади поверхности (29)

$$dV_2 = r\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}\, dt\, d\varphi, \tag{31}$$

так что

$$\dot{r}^2 < c^2, \quad \frac{1}{c}\sqrt{-f_1} = r\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}. \tag{32}$$

Входящий в систему уравнений (28) определитель равняется

$$\begin{vmatrix} \delta^0_\alpha & \delta^1_\alpha & \delta^2_\alpha \\ \xi^0_0 & \xi^1_0 & \xi^2_0 \\ \xi^0_1 & \xi^1_1 & \xi^2_1 \end{vmatrix} = r\dot{r}\delta^0_\alpha - x\delta^1_\alpha - y\delta^2_\alpha.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m}f^{kl}\xi^\nu_l) = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{r}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}, & \text{если } \alpha = 0, \\ -\dfrac{x^\alpha}{r}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{r\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} + \sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}\right), & \text{если } \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Таким образом, система уравнений (28) свелась к двум следующим уравнениям:

$$G_1\frac{d}{dt}\frac{r}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} = G_2 r\dot{r}, \tag{33}$$

$$G_1\left(\frac{1}{c^2}\frac{r\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} + \sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}\right) = G_2 r. \tag{34}$$

Уравнение (34) удовлетворяется, если удовлетворяется уравнение (33), так как

$$\frac{d}{dt}\frac{r\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} + c^2\ \sqrt{1-\dot{r}^2/c^2} = \frac{c^2}{\dot{r}}\frac{d}{dt}\frac{r}{\sqrt{1-\dot{r}/c^2}}. \tag{35}$$

Уравнение (33) один раз интегрируется:

$$G_1\frac{r}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} = \frac{1}{2}G_2 r^2 + C, \tag{36}$$

где C — константа интегрирования.

Полагая $C = 0$, получаем уравнение

$$r\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2} = 2\frac{G_1}{G_2}. \tag{37}$$

Теперь заметим, что в согласии с геометрическим смыслом радиальная координата r не может принимать отрицательных значений. В соответствии с этим находится особое решение

$$r = 2\frac{G_1}{G_2} \tag{38}$$

при условии

$$\frac{G_1}{G_2} > 0, \tag{39}$$

а также и общее решение

$$r = \sqrt{A^2 + c^2(t-t_1)^2} \tag{40}$$

уравнения (37), где $A = 2G_1/G_2$, а t_1 — константа интегрирования.

Чтобы выбрать нужное решение уравнения (37), подсчитаем энергию пластинки. Она равняется интегралу

$$E = \int T_0^0(t_0, x, y)\, dx\, dy \tag{41}$$

от компоненты T_0^0 тензора $T^{\alpha\beta}$ энергии-импульса пластинки, взятому по всей плоскости трехмерного мира Минковского в момент времени $t = t_0$.

Прежде чем вычислять интеграл (41), уточним смысл равенств (29). Параметрические уравнения границы мы ищем в виде

$$t = u^0, \quad x = \rho(u^0) \cos u, \quad y = \rho(u^0) \sin u \tag{42}$$

в декартовых координатах, а значит, в виде

$$t = u^0, \quad r = \rho(u^0), \quad \varphi = u \tag{43}$$

в цилиндрических координатах трехмерного мира Минковского.

Тензор $T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(1)} + T^{\alpha\beta}_{(2)}$ эфирной пластинки складывается из тензора $T^{\alpha\beta}_{(1)}$ эфирной гиперпленки и тензора $T^{\alpha\beta}_{(2)}$ эфирной массы. Согласно формулам (44), (16) работы [2] имеем

$$T^{\alpha\beta}_{(1)} = C_1 \int \delta(t_0 - u^0)\, \delta(x - \rho(u^0) \cos u)\, \delta(y - \rho(u^0) \sin u)(\eta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) dV_2,$$

$$T^{\alpha\beta}_{(2)} = C_2 \eta^{\alpha\beta}, \text{ если } r < \rho(t_0), \quad T^{\alpha\beta}_{(2)} = 0, \text{ если } r > \rho(t_0). \tag{44}$$

Соответственно, и энергия $E = E_1 + E_2$ складывается из энергии E_1 эфирной гиперпленки и энергии E_2 эфирной массы.

Сразу находим

$$E_2 = \pi \rho^2(t_0) G_2. \tag{45}$$

Чтобы вычислить E_1, рассмотрим два решения — особое, когда $\rho(t_0) = 2G_1/G_2 > 0$, и какое-нибудь частное (например, получающееся из общего при $t_1 = 0$, когда $\rho(t_0) = \sqrt{A^2 + (ct_0)^2}$).

В обоих случаях

$$dV_2 = 2\frac{G_1}{G_2} du^0 du, \quad \eta_0^0 - n^0 n_0 = \left(\frac{G_2}{2G_1}\rho(t_0)\right)^2,$$

а значит,

$$T^0_{0(1)} = \frac{1}{2} G_2 \rho^2 \int\limits_0^{2\pi} \delta(x - \rho \cos u)\, \delta(y - \rho \sin u)\, du, \tag{46}$$

где $\rho = \rho(t_0)$.

Далее, имеем равенство

$$\delta(x - \rho \cos u)\, \delta(y - \rho \sin u) = \frac{1}{r} \delta(\rho - r)\, \delta\left(u - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right), \tag{47}$$

так что

$$\int_0^{2\pi} \delta(x - \rho\cos u)\,\delta(y - \rho\sin u)\,du = \frac{1}{r}\delta(\rho - r). \tag{48}$$

Следовательно,

$$T^0_{0(1)} = \frac{1}{2}G_2\rho\delta(\rho - r), \tag{49}$$

а значит,

$$E_1 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} T^0_{0(1)} r\,dr\,d\varphi = \pi\rho^2 G_2. \tag{50}$$

Согласно (45) и (50) $E_1 = E_2$.

Замечательно, что энергия эфирной гиперпленки (очевидно, равномерно распределенная на окружности $r = \rho$) равна энергии эфирной массы (равномерно распределенной в круге $r < \rho$).

Поскольку внешние силы на пластинку не действуют, внутренняя энергия пластинки не зависит от времени. Следовательно, радиус эфирной пластинки тоже не зависит от времени и равняется

$$\rho = 2\frac{G_1}{G_2}, \tag{51}$$

причем $G_1/G_2 > 0$. Так как энергия пластинки

$$E = 2E_1 = 2E_2 = 8\pi G_2\left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2 \tag{52}$$

положительна, то $G_2 > 0$, а вместе с тем и $G_1 > 0$.

Так как на рассматриваемую пластинку внешние силы не действуют, то ее энергия не зависит от времени t, а вместе с ней не зависит от времени и ее радиус, причем $G_2 > 0$. Так как пластинка покоится, то ее энергия является внутренней.

Итак, в соответствии с физическим смыслом радиус эфирной пластинки равняется (38) при непременном условии (39).

Что до общего решения (40) уравнения (37), то в работе [7] предложено иное его толкование: однополый гиперболоид, описываемый всяким частным решением уравнения (37), получающимся из общего решения (40) при каком-нибудь выборе константы интегрирования (например, гиперболоид $r^2 - c^2t^2 = A^2$ при $t_1 = 0$), представляет собою двумерный мир де Ситтера, вложенный в трехмерный мир Минковского.

7. ЭФИРНЫЙ ШАР

В этом случае $n = 3, m = 2$. Решение будем искать в виде

$$x^0 = t = u^0, \quad x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\cos\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta, \\ \theta = u^1, \quad \varphi = u^2, \tag{53}$$

где $r = r(t)$.

На поверхности (53) метрика (1) равняется

$$ds^2 = (\dot r^2 - c^2)\, dt^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{54}$$

а элемент площади поверхности (53) равняется

$$dV_3 = r^2 \sqrt{1 - \dot r^2/c^2}\ \sin\,\theta\, dt\, d\theta\, d\varphi, \tag{55}$$

так что

$$\dot r^2 < c^2, \quad \frac{1}{c}\sqrt{-f_2} = r^2\sqrt{1-\dot r^2/c^2}\sin\,\theta. \tag{56}$$

Входящий в систему уравнений (28) определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} \delta^0_\alpha & \delta^1_\alpha & \delta^2_\alpha & \delta^3_\alpha \\ \xi^0_0 & \xi^1_0 & \xi^2_0 & \xi^3_0 \\ \xi^0_1 & \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^0_2 & \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} = r\sin\,\theta(r\dot r\delta^0_\alpha - x\delta^1_\alpha - y\delta^2_\alpha - z\delta^3_0).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u^k}(\eta_{\alpha\nu}\sqrt{-f_m}f^{kl}\xi^\nu_l) = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{r^2}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}}, & \text{если } \alpha = 0, \\ -\dfrac{x^\alpha}{r}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{r^2\dot r}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}} + 2r\sqrt{1-\dot r^2/c^2}\right), & \text{если } \alpha = 1,2,3. \end{cases}$$

Таким образом, система уравнений (28) свелась к двум следующим уравнениям:

$$G_2\frac{d}{dt}\frac{r^2}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}} = G_3 r^2 \dot r, \tag{57}$$

$$G_2\left(\frac{1}{c^2}\frac{r^2\dot r}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}} + 2r\sqrt{1-\dot r^2/c^2}\right) = G_3 r^2. \tag{58}$$

Уравнение (58) удовлетворяется, если удовлетворяется уравнение (57), так как при любом m

$$\frac{d}{dt}\frac{r^m\dot r}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}} + mc^2 r^{m-1}\ \sqrt{1-\dot r^2/c^2} = \frac{c^2}{\dot r}\frac{d}{dt}\frac{r^m}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}}. \tag{59}$$

Уравнение (57) один раз интегрируется:

$$G_2\frac{r^2}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}} = \frac{1}{3}G_3 r^3 + C, \tag{60}$$

где C — константа интегрирования.

Полагая $C = 0$, получаем

$$r\sqrt{1-\dot r^2/c^2} = 3\frac{G_2}{G_3}. \tag{61}$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, заключаем, что радиус эфирного шара следующий:

$$r = 3\frac{G_2}{G_3}, \tag{62}$$

причем

$$\frac{G_2}{G_3} > 0. \tag{63}$$

Внутренняя энергия эфирного шара равняется интегралу

$$E = 2E_1 = 2E_2 = \int T_0^0(t_0, x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{64}$$

от компоненты T_0^0 тензора $T^{\alpha\beta}$ энергии-импульса шара, взятому по трехмерному пространству четырехмерного мира Минковского в момент времени $t = t_0$.

Аналогично (44) имеем

$$T_{(2)}^{\alpha\beta} = C_3\eta^{\alpha\beta}, \ \text{ если } r < \rho, \quad T_{(2)}^{\alpha\beta} = 0, \ \ r > \rho. \tag{65}$$

$$T_{(1)}^{\alpha\beta} = C_2 \int \delta(t_0 - u^0)\, \delta(x - \rho^1)\, \delta(y - \rho^2) \delta(z - \rho^3)(\eta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)\, dV_3,$$

где

$$\rho = 3\frac{G_2}{G_3}, \quad dV_3 = 3\frac{G_2}{G_3} \sin\, u^1 du^1 du^2,$$

$$\rho^1 = \rho \sin\, u^1 \cos\, u^2, \quad \rho^2 = \rho \sin\, u^1 \sin\, u^2, \quad \rho^3 = \rho \cos\, u^1.$$

Сразу находим внутреннюю энергию E_2 эфирной массы. Она равна

$$E_2 = \frac{4}{3}\pi \left(3\frac{G_2}{G_3}\right)^3 G_3. \tag{66}$$

Тому же равняется внутренняя энергия эфирной гиперпленки. Чтобы доказать это, надо учесть следующие два равенства:

$$\delta(x - \rho^1)\, \delta(y - \rho^2)\, \delta(z - \rho^3) = \frac{1}{r^2}\delta(\rho - r)\, \delta\left(\mu - \cos\frac{z}{r}\right) \delta\left(u^2 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{2\pi} \delta(x - \rho^1)\, \delta(y - \rho^2)\, \delta(z - \rho^3) du^2 = \frac{1}{r^2}\delta(\rho - r).$$

Согласно предложенной в работе [7] интерпретации однополый гиперболоид, описываемый частным решением

$$r = \sqrt{A^2 + c^2t^2}, \quad \text{где} \quad A = 3\frac{G_2}{G_3}, \tag{67}$$

уравнения (61), представляет собою трехмерный мир де Ситтера, вложенный в четырехмерный мир Минковского.

8. МНОГОМЕРНЫЙ ЭФИРНЫЙ ШАР

В регулярном общем случае $m = n - 1$, $n \geqslant 2$, получается уравнение

$$G_m \frac{r^m}{\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}} = \frac{1}{n} G_n r^n + C. \tag{68}$$

Полагая $C = 0$, получаем

$$r\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2} = n \frac{G_m}{G_n}. \tag{69}$$

Повторяя вышеизложенные рассуждения, заключаем, что радиус n-мерного эфирного шара равняется

$$r = n \frac{G_m}{G_n}, \tag{70}$$

причем

$$\frac{G_m}{G_n} > 0. \tag{71}$$

Теперь уже нетрудно доказать, что внутренняя энергия E_1 эфирной гиперпленки равна внутренней энергии E_2 эфирной массы и в общем случае n-мерного эфирного шара, а именно:

$$E_2 = M(V_n)G_n = E_1 = M(\partial V_n)G_m, \tag{72}$$

где $M(V_n)$ — объем n-мерного шара радиуса ρ, а $M(\partial V_n)$ — площадь его границы — сферы того же радиуса.

Согласно предложенной в работе [7] интерпретации однополый гиперболоид, описываемый частным решением

$$r = \sqrt{A^2 + c^2 t^2}, \quad \text{где} \quad A = n \frac{G_m}{G_n}, \tag{73}$$

уравнения (69), представляет собой n-мерный мир де Ситтера, вложенный в $(n+1)$-мерный мир Минковского.

В исключительном случае $m = 0, n = 1$ задача о радиусе эфирного шара переходит в рассмотренную в работе [8] задачу об эфирной нити, стягивающей две одинаковые материальные точки. В работе [3] выведен лагранжиан такой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Дифференциальные уравнения времениподобных геодезических поверхностей в римановом пространстве-времени // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 6(135). С. 113–122.
2. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Тензор энергии-импульса ареальных объектов в римановом пространстве-времени // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 1(137). С. 7–14.
3. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Ареальные объекты и проблема: λ-член в теории тяготения // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 6(142). С. 749–756.
4. *Хасслер У.* Геометрическая теория интегрирования. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

5. *Черников Н. А.* Две связности в теории гравитации. Препринт ОИЯИ Р2-96-65. Дубна, 1996; Гравитация. Т. 2, вып. 1. СПб.: Научно-образоват. об-ние «Земля и Вселенная», 1996. С. 5–24.
6. *Шавохина Н. С.* Ареальные объекты в физике взаимодействия релятивистских частиц // Проблемы квантовой теории поля: Тр. VIII Междунар. совещ. по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 1987. Дубна, 1987. С. 246–255.
7. *Шавохина Н. С.* Примеры ареальных объектов: система двух тел, сферическая мембрана, мир де Ситтера. Сообщение ОИЯИ Р2-89-183. Дубна, 1989.
8. *Шавохина Н. С.* Одномерное релятивистское движение двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия // Изв. вузов. Физика. 1982. №7. С. 66–69.

Получено 17 августа 2009 г.