Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, №5(147). С. 704–708

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ

Р. Г. Шуляковский

Институт физики НАН Белоруссии, Минск

Рассматриваются двумерные скалярные полевые модели с нетривиальным потенциалом, заданные в ограниченных пространственных областях. Получены точные аналитические инстантонные решения для таких моделей и солитонные решения для аналогичных трехмерных систем.

Two-dimensional scalar field models with non-trivial potential in limited space regions are considered. Exact analytical instanton solutions for such models and soliton solutions for analogous three-dimensional systems are received.

PACS: 11.10.-z

ВВЕДЕНИЕ

Инстантоны — нетривиальные классические решения в евклидовом пространстве с конечным действием — широко используются для описания туннельных процессов в квантово-механических и полевых системах (см., например, [1]). Наибольшие успехи достигнуты при использовании метода инстантонов в физически содержательных калибровочных полевых теориях, таких как КХД и теория электрослабых взаимодействий. Так, например, показано, что инстантоны могут объяснять асимметрию вещества и антивещества во Вселенной, приводят к спонтанному нарушению киральной инвариантности в теории сильных взаимодействий, решают $U(1)$-проблему КХД и ряд других вопросов (подробно см. в обзорах [2, 3]); предложены способы непосредственного обнаружения КХД-инстантонов в экспериментах по глубоконеупругому лептон-протонному рассеянию и другим процессам при высоких энергиях [4, 5]. В то же время подавляющее большинство упомянутых выше предсказаний и объяснений делается с многочисленными предположениями и допущениями вследствие чрезвычайной сложности математического аппарата, используемого в квантовых теориях калибровочных полей. В связи с этим часто оказывается полезным изучить инстантонные эффекты применительно к более простым полевым моделям. Простейшей такой моделью могла бы стать двумерная скалярная теория с нетривиальным потенциалом (например, модель синус-Гордона), но существование инстантонов в таких моделях запрещает теорема Деррика–Хобарта [6].

Ситуацию можно исправить, если рассматривать скалярные модели в ограниченных пространственных областях. Ниже будет показано, что при этом снимается запрет на существование инстантонов (и связанного с ним туннелирования из одного классического вакуума модели в другой), а также будут представлены точные аналитические инстантонные решения для модели синус-Гордона и модели с двуямным потенциалом.

1. ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ СИНУС-ГОРДОНА

Рассмотрим двумерную скалярную модель в пространстве-времени $S^1 \otimes R^1$, т. е. когда пространственная область является окружностью, $-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$, $-\infty < t < \infty$, $\varphi(-L/2, t) = \varphi(L/2, t)$:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi), \qquad V(\varphi) = \lambda(1 - \cos(\rho\varphi)), \qquad \mu = 0, 1, \tag{1}$$

где L — плотность функции Лагранжа; φ — вещественное скалярное поле. Для нахождения инстантонов запишем уравнения поля в евклидовом пространстве (произведя замену $t \to -i\tau$, где τ — «мнимое время»):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0. \tag{2}$$

Ограничимся поиском пространственно-однородных решений. Тогда (2) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial\varphi}. \tag{3}$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\varphi^{\mathrm{inst}}(x, \tau) = \pm\frac{4}{\rho}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{(\tau-\tau_0)\rho\sqrt{\lambda}}. \tag{4}$$

Вычислим евклидово действие для такого решения:

$$S[\varphi^{\mathrm{inst}}] = \int\limits_{-L/2}^{L/2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^{\mathrm{inst}}}{\partial\tau}\right)^2 + V(\varphi^{\mathrm{inst}})\right] = \frac{8\sqrt{\lambda}L}{\rho}. \tag{5}$$

Отметим, что инстантонные решения (4) с точностью до обозначений совпадают со статическими кинковыми решениями модели (1), а интеграл по $d\tau$, входящий в евклидово действие (5), — с энергией статического кинка.

Решение (4) и действие (5) можно использовать для вычисления амплитуды туннелирования между различными классическими вакуумами теории. Приведем в качестве примера вычисление амплитуды в гауссовом приближении с экспоненциальной точностью:

$$\left\langle \varphi^{\mathrm{vac}}(x, \tau) = 0 \,\middle|\, \varphi^{\mathrm{vac}}(x, \tau) = \frac{2\pi}{\rho} \right\rangle \approx \int D\varphi\,\mathrm{e}^{-S[\varphi]} \sim \mathrm{e}^{-S[\varphi^{\mathrm{inst}}]} = \exp\left(-\frac{8\sqrt{\lambda}L}{\rho}\right). \tag{6}$$

Для вычисления использовался формализм функциональных интегралов Фейнмана. Очевидно, что при $L \to \infty$ действие стремится к бесконечности и амплитуда обращается в ноль, что согласуется с теоремой Деррика–Хобарта, запрещающей существование инстантонов (и, следовательно, туннелирования) в двумерных полевых теориях в случае неограниченных пространственных областей. Отметим также, что вклад в функциональный интеграл (6) дают не только инстантонные решения, но и другие полевые конфигурации (не обязательно пространственно-однородные и не обязательно являющиеся решениями). Вклад таких конфигураций должен входить в предэкспоненциальный фактор.

2. ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ С ДВУЯМНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим модель в пространстве-времени $S^1 \otimes R^1$, где $-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$, $-\infty < t < \infty$, $\varphi(-L/2, t) = \varphi(L/2, t)$:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi), \qquad V(\varphi) = \lambda(\rho^2 - \varphi^2)^2, \qquad \mu = 0, 1. \tag{7}$$

Вычислим по аналогии с разд. 1 инстантонные решения, евклидово действие на этих решениях и амплитуду туннелирования между классически различным вакуумом (в гауссовом приближении с экспоненциальной точностью):

$$\varphi^{\rm inst}(x, \tau) = \pm\,\mathrm{th}\left(\rho\sqrt{2\lambda}(\tau - \tau_0)\right), \tag{8}$$

$$S[\varphi^{\rm inst}(x, \tau)] = \frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\rho^3 L, \tag{9}$$

$$\langle\varphi^{\rm vac}(x, \tau) = -\rho|\varphi^{\rm vac}(x, \tau) = \rho\rangle \approx \int D\varphi\,\mathrm{e}^{-S[\varphi]} \sim \exp\left(-\frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\rho^3 L\right). \tag{10}$$

Отметим, что условие $\varphi(-L/2, t) = \varphi(L/2, t)$ нигде до сих пор не использовалось, использовался лишь факт ограниченности пространственной области размером L. Превращение пространственной области в окружность удобно с точки зрения приобретения $U(1)$-симметрии.

Недостатком предложенных моделей (1) и (7) является отсутствие лоренц-инвариантности.

3. СОЛИТОНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Хорошо известно, что инстантонные решения двумерных моделей формально совпадают со статическими солитонами аналогичных трехмерных моделей. Поэтому, основываясь на найденных решениях (4) и (8), можно автоматически записать солитонные решения соответственно для модели синус-Гордона и модели с двуямным потенциалом в трехмерном пространстве-времени $S^1 \otimes R^1 \otimes R^1$ ($-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$, $-\infty < y, t < \infty$, $\varphi(-L/2, y, t) = \varphi(L/2, y, t)$):

$$\varphi_1^{\rm sol}(x, y, t) = \pm\frac{4}{\rho}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{(y - y_0)\rho\sqrt{\lambda}}, \tag{11}$$

$$\varphi_2^{\rm sol}(x, y, t) = \pm\,\mathrm{th}\left(\rho\sqrt{2\lambda}(y - y_0)\right). \tag{12}$$

Значения энергий соответствующих солитонов формально совпадают со значениями евклидовых действий (5) и (9):

$$E[\varphi_1^{\rm sol}(x, y, t)] = \frac{8\sqrt{\lambda}}{\rho}L, \tag{13}$$

$$E[\varphi_2^{\rm sol}(x, y, t)] = \frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\rho^3 L. \tag{14}$$

Если область значений x не ограничена ($L \to \infty$), то значения энергий (13) и (14) становятся бесконечными и существование таких солитонов становится невозможным (опять же в соответствии с теоремой Деррика–Хобарта).

Статические решения (11) и (12) можно сделать зависящими от времени путем перехода к движущейся относительно оси y системе отсчета:

$$\varphi_1^{\mathrm{sol}}(x,y,t) = \pm\frac{4}{\rho}\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{(y-y_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\rho\sqrt{\lambda}\right)\right], \tag{15}$$

$$\varphi_2^{\mathrm{sol}}(x,y,t) = \pm\operatorname{th}\left[\frac{(y-y_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\rho\sqrt{2\lambda}\right], \tag{16}$$

где u — скорость новой системы отсчета относительно старой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в работе двумерные скалярные модели являются простейшими полевыми теориями, допускающими инстантоны. В большинстве учебников и обзоров по инстантонной физике в качестве простейших моделей рассматриваются квантово-механические системы, а затем сразу следует переход либо к чистым янг-миллсовским теориям (как, например, в обзоре [7]), либо к скалярным полевым теориям с ложным и истинным вакуумом (т. е. теориям, в которых, строго говоря, инстантонных решений не существует, см., например, монографию [8]), либо к теориям типа абелевой модели Хиггса (например, монография [1]). При этом в двух последних случаях точные аналитические решения отсутствуют, что препятствует простому рассмотрению задач. В отличие от этого предложенные в работе модели, во-первых, являются более простыми, во-вторых, допускают точные аналитические решения. Это позволяет ликвидировать методический «пробел» в изложении основ инстантонной физики и дает возможность моделировать сложные эффекты (такие как множественное рождение частиц в процессах, индуцированных инстантонами, при высоких энергиях) на простом уровне.

Другим важным приложением представленных моделей может стать исследование хаоса в полевых моделях в присутствии внешнего возмущения. Это направление активно развивается в квантовой механике (см., в частности, [9]).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф07Д-002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rajaraman R.* An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North-Holland Publ. Comp., 1982.
2. *Рубаков В. А., Шапошников М. Е.* // УФН. 1996. Т. 166. С. 493.
3. *Schaefer T., Shuryak E.* // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 323.
4. *Moch S., Ringwald A., Schrempp F.* // Nucl. Phys. B. 1997. V. 507. P.134;
Ringwald A., Schrempp F. // Phys. Lett. B. 1998. V. 438. P. 217;
Ringwald A., Schrempp F. // Phys. Lett. B. 2001. V. 503. P. 331.

5. *Кашкан В. И., Кувшинов В. И., Шуляковский Р. Г.* // ЯФ. 2002. Т. 65. С. 956.

6. *Derrick G. H.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 1252;
Hobart R. // Proc. Phys. Soc. 1963. V. 82. P. 201.

7. *Вайнштейн А. И. и др.* // УФН. 1982. Т. 136(4). С. 553.

8. *Рубаков В. А.* Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

9. *Kuvshinov V., Kuzmin A., Shulyakovsky R.* // Acta Phys. Polon. B. 2002. V. 33. P. 1721;
Kuvshinov V., Kuzmin A., Shulyakovsky R. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 015201-1.

Получено 27 июля 2007 г.