Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 5(161). С. 505–515

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ОПЕРАТОРЫ КИНЕТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА

Р. М. Мир-Касимов[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Университет им. Намыка Кемаля, Текирдаг, Турция

В рамках квантовой теории в релятивистском конфигурационном r-пространстве вводятся кинетические импульсы, соответствующие половине неевклидова расстояния до начала координат в пространстве скоростей Лобачевского. Эти операторы, совпадающие с точностью до постоянного множителя с генераторами трансляций r-пространства, являются внешними производными для некоммутативного дифференциального исчисления.

In the framework of the quantum theory in the relativistic configuration r-space the kinetic momenta, corresponding to the half of the non-Euclidean distance in the Lobachevsky velocities space, are introduced. These operators, coinciding up to the constant factor with the generators of translations of the r-space, are the exterior derivatives of the noncommutative differential calculus.

PACS: 11.30.Cp; 03.30.+p; 03.65.-w

ВВЕДЕНИЕ

Предтечей концепции релятивистского конфигурационного r-пространства, введенной в работе [1], была идея Снайдера [2, 3] о некоммутативном пространстве. В первой работе [2] Снайдера подчеркнуто, что некоммутирующие операторы координат и времени являются генераторами бустов искривленного дуального пространства[2]. При построении релятивистского конфигурационного r-пространства использовался тот факт, что массовая поверхность релятивистской частицы

$$p^{0^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2, \qquad p^0 > 0, \tag{1}$$

представляет собой импульсное пространство постоянной кривизны — пространство Лобачевского. Соответственно генераторы лоренцевых бустов

$$x^i = M^{0i} = i\hbar\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}\frac{\partial}{\partial p^i} \tag{2}$$

можно рассматривать как трехмерные аналоги операторов координат Снайдера. Три оператора (2) не образуют замкнутой алгебры по отношению к коммутированию, каковой является алгебра Ли группы Лоренца $SL(2, C)$, включающая также генераторы углового

[1] E-mail: mirkr@theor.jinr.ru

[2] См. подстрочное примечание в [2] с благодарностью В. Паули за эту интерпретацию.

момента. Переход от некоммутативного пространства Снайдера к коммутативному релятивистскому конфигурационному пространству равносилен замене некоммутирующих операторов x^i на полный набор коммутирующих операторов, принадлежащих универсальной обертывающей алгебре $SL(2,C)$. Это, по сути дела, преобразование к квантово-механическому представлению, эквивалентному снайдеровскому, релятивистской квантовой теории на гиперболоиде (1). В роли оператора квадрата радиуса-вектора в релятивистском конфигурационном представлении выступает квадратичный оператор Казимира, коммутирующий с операторами Снайдера, а также с операторами углового момента.

Отсылая читателя за деталями к [1] (см. также [4–6]), укажем здесь лишь основные аспекты квантовой теории в релятивистском конфигурационном представлении.

Релятивистской плоской волной является ядро преобразования Гельфанда–Граева:

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \left(\frac{p^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{mc}\right)^{-1-i\frac{rmc}{\hbar}}, \tag{3}$$

$\mathbf{n}^2 = 1$. Плоская волна $\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle$ есть волновая функция свободного движения, т. е. движения с заданным значением энергии и импульса, в релятивистском конфигурационном $\mathbf{r}$-пространстве (см. формулу (11))

$$\mathbf{r} = r\mathbf{n}, \qquad 0 \leqslant r < \infty, \qquad \mathbf{n}_p = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta), \tag{4}$$

r — релятивистский инвариант, связанный с собственным значением оператора Казимира группы Лоренца [1]. Релятивистское конфигурационное $\mathbf{r}$-пространство дуально пространству импульсов Лобачевского в смысле преобразования Фурье с ядрами (3). Плоская волна (3) является производящей функцией матричных элементов основной серии неприводимых унитарных представлений группы Лоренца $SL(2,C)$ (группы изометрий пространства Лобачевского (1)). В нерелятивистском пределе

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle \longrightarrow \exp\left(i\frac{\mathbf{r}\mathbf{p}}{\hbar}\right). \tag{5}$$

В большей части настоящей работы принята система единиц, в которой $c = m = \hbar = 1$. Лишь в тех соотношениях, в которых роль размерных констант важна для понимания физического смысла, они восстанавливаются без дополнительных оговорок, поскольку это ясно из контекста.

Ключевую роль в рассматриваемом релятивистском формализме играют дифференциально-разностные операторы энергии и импульса:

$$H_0 = \hat{p}^0 = \operatorname{ch} i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\operatorname{sh} i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\triangle_{\vartheta,\phi}}{2r^2}\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{6}$$

$$\hat{p}^1 = \sin\vartheta\cos\phi\left[\hat{p}^0 - \exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] - i\left(\frac{\cos\vartheta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{7}$$

$$\hat{p}^2 = \sin\vartheta\sin\phi\left[\hat{p}^0 - \exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] - i\left(\frac{\cos\vartheta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$\hat{p}^3 = \cos\vartheta\left[\hat{p}^0 - \exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] + i\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{9}$$

где $\triangle_{\vartheta,\phi}$ — угловая часть оператора Лапласа.

Операторы 4-импульса (6)–(9) коммутируют:

$$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{10}$$

Плоские волны (3) являются собственными функциями операторов 4-импульса (6)–(9):

$$\hat{p}^\mu \, \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = p^\mu \, \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \,. \tag{11}$$

В нерелятивистском пределе операторы (7)–(9) переходят в обычные квантово-механические операторы импульса (с точностью до постоянного фактора — операторы дифференцирования).

Несмотря на коммутативность операторов $\hat{p}^\mu$, они не могут рассматриваться как генераторы трансляций в каком-либо (линейном) представлении группы Пуанкаре. Поскольку оператор $\hat{p}^0$ входит в выражения для $\hat{p}^1 - \hat{p}^3$, выражения для последних нелинейны по обычным производным $\partial/\partial\vartheta$, $\partial/\partial\varphi$ (ϑ, φ — угловые координаты вектора $\mathbf{r}$, см. формулу (4)) и конечно-разностной производной $\hat{\Delta} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{\partial}{\partial r}} - 1}{i}$ по радиальной координате вектора $\mathbf{r}$. Такие «операторы импульсов» не могут быть внутренними производными в каком-либо линейном (обобщенном) дифференциальном исчислении и, стало быть, генераторами группы Лоренца в некотором ее линейном представлении. Однако отождествление операторов импульса с генераторами трансляций является основополагающим требованием квантовой теории. Выход из этого противоречия существует. Он основан на том, что операторы (6)–(9) — не единственные обобщения на случай релятивистского конфигурационного пространства операторов импульса нерелятивистской квантовой теории. Разрешение вышеуказанной проблемы основано на введении вместо $\hat{p}^\mu$ новых релятивистских импульсов $\hat{k}^\mu$, связанных с половинным расстоянием в пространстве Лобачевского (1). Мы будем называть их кинетическими импульсами.

Неевклидово расстояние от точки с координатами p^μ до начала координат является ключевой переменной пространства импульсов Лобачевского (1). Рассмотрим гиперсферические координаты в пространстве Лобачевского с началом в точке $p^\mu = 0$:

$$p^0 = \operatorname{ch}\chi, \quad \mathbf{p} = \operatorname{sh}\chi \mathbf{n}_p, \quad \mathbf{n}_p = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{12}$$

Величина χ является неевклидовым расстоянием. Связь между релятивистской энергией и импульсом (1) с точки зрения геометрии сводится к «гиперболической теореме Пифагора» $\operatorname{ch}^2\chi - \operatorname{sh}^2\chi = 1$.

Новые импульсы $\hat{k}^\mu$ задаются соотношениями

$$k^0 = 2\operatorname{ch}\frac{\chi}{2}, \quad \mathbf{k} = 2\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}\mathbf{n}_p. \tag{13}$$

Укажем здесь на важные свойства кинетического импульса. Выражение для энергии в терминах кинетического импульса есть

$$E = mc^2 \operatorname{ch}\chi = mc^2\left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{\chi}{2}\right) = mc^2 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \tag{14}$$

или

$$E_{\text{kin}} = E - mc^2 = \frac{\mathbf{k}^2}{2m}. \tag{15}$$

Таким образом, связь между релятивистской кинетической энергией E_{kin} и импульсом $\mathbf{k}$ задается нерелятивистским по виду соотношением. Для обычных импульсов такое разделение релятивистской энергии на энергию покоя и кинетическую существует только в нерелятивистском приближении

$$E = p^0 c = \sqrt{m^2c^4 + \tilde{p}^2c^2} \simeq mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \qquad |\mathbf{p}| \ll mc. \tag{16}$$

1. ДВУМЕРНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Соотношения в импульсном пространстве весьма просты. Нетривиальная задача — найти выражения для этих операторов в релятивистском конфигурационном представлении. Мы увидим, что это возможно в контексте некоммутативного дифференциального исчисления. При этом искомые операторы импульса будут генераторами трансляций в r-пространстве. Приступим к решению этой задачи.

Чтобы избежать необходимости выписывать громоздкие формулы, рассмотрим случай двумерного пространства Лобачевского и, соответственно, двумерного релятивистского конфигурационного пространства. Гиперсферические координаты и кинетические k-импульсы имеют вид

$$p^0 = \operatorname{ch}\chi, \quad \tilde{p} = \operatorname{sh}\chi \tilde{n}_p, \quad \tilde{n}_p = (\cos\phi, \sin\phi), \tag{17}$$

k-импульсы определяются соотношениями

$$k^0 = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2}, \quad \tilde{k} = \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}\tilde{n}_p. \tag{18}$$

При этом двумерные векторы обозначаются значком «тильда» сверху,

$$\tilde{k} = (k^1, k^2), \qquad \mu = 0, 1, 2. \tag{19}$$

Релятивистская плоская волна в двумерном случае и ее разложение по матричным элементам двумерной группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$ имеют вид

$$\langle\tilde{\rho}|\tilde{p}\rangle = \left(\frac{p^0 - \tilde{p}\cdot\tilde{n}}{mc}\right)^{-\frac{1}{2}-i\rho} = (\operatorname{ch}\chi - \operatorname{sh}\chi\cos(\phi-\psi))^{-\frac{1}{2}-i\rho} =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(-i\rho+1/2)}{\Gamma(-i\rho+1/2+m)} P^m_{-\frac{1}{2}-i\rho}(\operatorname{ch}\chi)\, \mathrm{e}^{im(\psi-\phi)}, \tag{20}$$

$$\tilde{\rho} = \rho\tilde{n}, \qquad \tilde{n} = (\cos\psi, \sin\psi).$$

Коммутирующие операторы импульса запишутся как

$$\hat{p}^0 = \operatorname{ch} i\partial_\rho + \frac{i}{2\rho}\operatorname{sh} i\partial_\rho - \frac{1}{2\rho\left(\rho + \dfrac{i}{2}\right)}(\partial_\psi)^2 \mathrm{e}^{\partial_\rho},$$

$$\hat{p}^\pm = \frac{\mathrm{e}^{\pm i\psi}}{2}\left\{\hat{p}^0 - \mathrm{e}^{\partial_\rho} \pm \frac{1}{\left(\rho + \dfrac{i}{2}\right)}\mathrm{e}^{\partial_\rho}\partial_\psi\right\}, \tag{21}$$

$$\hat{p}^\pm = \frac{\hat{p}^1 \pm i\hat{p}^2}{2}, \qquad \partial_\rho = \frac{\partial}{\partial\rho}, \qquad \partial_\psi = \frac{\partial}{\partial\psi}.$$

В нерелятивистском пределе эти операторы переходят в стандартные операторы энергии и импульса квантовой механики:

$$\begin{gathered}\hat{p}^0 - 1 \longrightarrow \frac{\tilde{k}^2}{2} = -\frac{1}{2}(\partial_\rho)^2 - \frac{i}{2\rho}\partial_\rho - \frac{1}{2\rho^2}(\partial_\psi)^2, \\ \hat{p}^\pm \longrightarrow \tilde{k}^\pm = -\frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{\pm i\psi}\left(\partial_\rho \pm \frac{i}{\rho}\partial_\psi\right), \quad \hat{k}^\pm = \frac{k^1 \pm k^2}{2}.\end{gathered} \tag{22}$$

Приступим теперь к решению главной проблемы — к установлению явного вида релятивистских кинетических импульсов $\tilde{k}$, соответствующих $\chi/2$ (18). Это требует существенного изменения основных величин квантовой теории в релятивистском конфигурационном пространстве. Прежде всего, необходимо обобщить базисную концепцию релятивистской плоской волны и перейти от (3) к производящей функции для обобщенных функций Якоби [7]

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\rho}|\tilde{k}\rangle \longrightarrow \langle\tilde{\rho}, n|\tilde{k}\rangle &= \\ &= \left(\operatorname{ch}\frac{\chi}{2} - \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}\,\mathrm{e}^{i(\psi-\phi)}\right)^{-i\rho-\frac{1}{2}+n}\left(\operatorname{ch}\frac{\chi}{2} - \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}\,\mathrm{e}^{-i(\psi-\phi)}\right)^{-i\rho-\frac{1}{2}-n}.\end{aligned} \tag{23}$$

При таком более общем подходе в релятивистском конфигурационном представлении появляется новый дискретный параметр n. Новая плоская волна удовлетворяет условию

$$\langle\tilde{\rho}, 0|\tilde{k}\rangle = \langle\tilde{\rho}|\tilde{k}\rangle. \tag{24}$$

Плоская волна $\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{k}\rangle$ является производящей функцией для обобщенных функций Якоби $P_{mn}^{-\frac{1}{2}-i\rho}(\operatorname{ch}\chi)$:

$$\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{k}\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{mn}^{-\frac{1}{2}-i\rho}(\operatorname{ch}\chi)\,\mathrm{e}^{i(n-m)(\psi-\phi)}. \tag{25}$$

Величины m, n — одновременно целые или полуцелые числа. Операторы $\hat{\tilde{r}} = (\hat{k}^1, \hat{k}^2)$ в конфигурационном ρ-, ψ-, n-представлении могут быть выведены с использованием рекуррентных соотношений для функций Якоби:

$$P^{\mu}_{mn}(\operatorname{ch}\chi) = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2}P^{\mu+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\chi) - \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}P^{\mu+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\chi), \tag{26}$$

$$P^{\mu}_{mn}(\operatorname{ch}\chi) = -\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}P^{\mu+\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\chi) + \operatorname{ch}\frac{\chi}{2}P^{\mu+\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\chi). \tag{27}$$

Для удобства введем операторы $\hat{q}^i = \frac{1}{2}\hat{k}^i$, $i = 1, 2$, а также $\hat{q}^{\pm} = \frac{\hat{q}^1 \pm \hat{q}^2}{2}$. μ — любое комплексное число. Мы имеем

$$\hat{q}^+ = \mathrm{e}^{i\psi}\left\{\frac{-i\rho - 1/2 + n}{i\rho}\operatorname{sh}\frac{i}{2}\partial_\rho + \frac{1}{2\rho}\partial_\psi\,\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\right\}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}, \tag{28}$$

$$\hat{q}^- = \mathrm{e}^{-i\psi}\left\{\frac{-i\rho - 1/2 - n}{i\rho}\operatorname{sh}\frac{i}{2}\partial_\rho - \frac{1}{2\rho}\partial_\psi\,\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\right\}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n}. \tag{29}$$

Компоненты операторов $\hat{q}$ коммутируют:

$$\left[\hat{q}^1, \hat{q}^2\right] = \frac{i}{2}\left[\hat{q}^+, \hat{q}^-\right] = 0. \tag{30}$$

Обобщенные плоские волны $\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{p}\rangle$ являются общими собственными функциями для $\hat{q}^{\pm}$ с собственными значениями $q^{\pm}$:

$$\hat{q}^{\pm}\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{p}\rangle = \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}\mathrm{e}^{\pm i\phi}\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{p}\rangle. \tag{31}$$

Необходимо также рассмотреть операторы, соответствующие собственному значению $\operatorname{ch}\chi/2$:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_+ &= -\frac{1}{2i\rho}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}\left\{(-i\rho - n)\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho} + (-i\rho + n)\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\partial_\rho} - i\partial_\psi\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\right\} = \\ &= \left(\mathrm{e}^{-i\psi}\hat{q}^+ + \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}\right),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\hat{c}_- &= -\frac{1}{2i\rho}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n}\left\{(-i\rho + n)\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho} + (-i\rho - n)\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\partial_\rho} + i\partial_\psi\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\right\} = \\ &= \left(\mathrm{e}^{i\psi}\hat{q}^- + \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\partial_\rho}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

$$\hat{c}_{\pm}\,\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{p}\rangle = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2}\,\langle\tilde{\rho}, n|\tilde{p}\rangle\,. \tag{34}$$

2. НЕКОММУТАТИВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим теперь дифференциальное исчисление над ассоциативной алгеброй A координатных функций над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Необходимость рассмотрения более общего дифференциального исчисления [8, 9] (мы увидим, что оно некоммутативно) вытекает из дифференциально-разностного характера релятивистских операторов импульса $\tilde{\hat{q}}$ и $\hat{c}_{\pm}$. Конечные линейные комбинации элементов A и произведения конечного числа элементов также являются элементами A. Данное произведение ассоциативно. Дифференциальное исчисление над A является $\mathbb{Z}$-градуированной ассоциативной алгеброй над $\mathbb{C}$:

$$\Omega(A) = \sum_{r=0} \oplus \Omega^r(A). \tag{35}$$

Элементы $\Omega^r(A)$ называются r-формами. Существует внешняя производная $\hat{d}$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\hat{d}^2 = 0, \qquad \hat{d}(\omega\omega') = (\hat{d}\omega)\omega' + (-1)^r \omega\, \hat{d}\omega', \tag{36}$$

где ω и ω' являются формами r и r' соответственно. В нашем случае A — коммутативная алгебра, генерируемая координатными x_i-функциями $f(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Мы можем построить явную конструкцию, определяющую $\hat{d}$ как операторнозначную 1-форму. В случае *обычного дифференциального исчисления*

$$\hat{d} = dx_i \partial_i, \tag{37}$$

где dx_i — независимые дифференциалы (произвольные параметры), подчиняющиеся правилам внешнего произведения ($\wedge$-произведения) (мы опускаем символ $\wedge$ внешнего произведения в формулах). Дифференцирование определяется соотношением

$$\hat{d}\omega = [\hat{d}, \omega]_\wedge = \hat{d}\omega - (-1)^r \omega \hat{d}. \tag{38}$$

Например, если $\omega = \omega^0 = f(x_1, \ldots, x_n)$, то, применяя (38), получаем

$$\begin{aligned} \hat{d}\omega^0 = [\hat{d}, \omega^0]_\wedge = dx_i\, \partial_i f - f dx_i \partial_i = dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + f dx_i\, \partial_i - f dx_i\, \partial_i = \\ = dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} d^2 = \{\hat{d}, [\hat{d}, f]\} = \hat{d}\left(dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{d} = \\ = dx_i \wedge dx_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (dx_i \wedge dx_j + dx_j \wedge dx_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

В отсутствие нижнего значка $\wedge$ скобки $[]$ и $\{\}$ обозначают обычный коммутатор и антикоммутатор соответственно. Тривиальное соотношение имеет вид

$$[\hat{d}, x_k] = dx_i\, \partial_i x_k - x_k\, dx_i\, \partial_i = dx_i \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = dx_k. \tag{41}$$

В случае обычного дифференцирования дифференциалы dx_k являются численными параметрами, коммутирующими с координатами dx_i:

$$[dx_k, x_i] = 0. \tag{42}$$

В релятивистском случае дифференциальное исчисление некоммутативно:

$$[dx_k, x_i] \neq 0. \tag{43}$$

Чтобы построить дифференциальное исчисление в релятивистском конфигурационном пространстве, нам необходимо определить внешнюю производную $\hat{d}$. Рассмотрим сначала нерелятивистские операторы импульса. Оператор внешнего дифференцирования $\hat{d}$ просто выражается через импульсы:

$$\hat{d} = dx_1\,\partial x_1 + dx_2\,\partial x_2 = i(dx_+\hat{k}_- + dx_-\hat{k}_+). \tag{44}$$

Принимая во внимание (22), а также соотношения

$$dx_\pm = dx_1 \pm dx_2 = \mathrm{e}^{\pm i\psi}(d\rho \pm i\rho\, d\psi), \tag{45}$$

$$\hat{d} = i\mathrm{e}^{i\psi}(d\rho + i\rho\, d\psi)\left(-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{-i\psi}\right)\left(\partial_\rho - \frac{i}{\rho}\partial_\psi\right) + \\ + i\mathrm{e}^{-i\psi}(d\rho - i\rho\, d\psi)\left(-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{i\psi}\right)\left(\partial_\rho + \frac{i}{\rho}\partial_\psi\right) = d\rho\partial_\rho + d\psi\partial_\psi, \tag{46}$$

используя равенства (38), (39), получаем

$$df(\rho,\psi) = [\hat{d}, f] = d\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + d\psi\frac{\partial f}{\partial\psi}. \tag{47}$$

В релятивистском случае дифференциалы $dx_\pm$ изменяются и становятся операторнозначными выражениями:

$$\hat{dx}_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\psi}\left(d\rho \pm \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\partial_\rho}(i\rho \mp n)d\psi\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}. \tag{48}$$

В нерелятивистском пределе $\hat{dx}_\pm \longrightarrow dx_\pm$, где $dx_\pm$ определяются соотношением (45).

Следующее равенство удовлетворяется тождественно:

$$i\left(\hat{dx}_+\hat{q}^- + \hat{dx}_-\hat{q}^+\right) = d\rho\left(-2i\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\partial_\rho\right) + d\psi\partial_\psi \longrightarrow d\rho\partial_\rho + d\psi\partial_\psi. \tag{49}$$

Данное выражение может рассматриваться как кандидат на роль внешней производной $\hat{d}$. Однако, несмотря на то, что (45) имеет правильный нерелятивистский предел, это выражение неполно и не может рассматриваться как релятивистский $\hat{d}$-оператор. Правильный $\hat{d}$-оператор должен с необходимостью включать $\mathrm{ch}\,\chi/2$ — компоненты оператора импульса $\hat{c}_\pm$. Последнее обстоятельство связано с правилом Лейбница, обобщенным на случай конечно-разностных операторов дифференцирования (см., например, [6]). Полное выражение для $\hat{d}$ имеет вид

$$\hat{d} = i\left(\hat{dx}_+\hat{q}^- + \hat{dx}_-\hat{q}^+ + \hat{dx}_{0+}(\hat{c}_+ - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}) + \hat{dx}_{0-}(\hat{c}_- - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n})\right), \tag{50}$$

где

$$\hat{dx}_{0\pm} = (d\rho_+ \pm d\rho_-)\,\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{2}\partial_n}. \tag{51}$$

Теперь $\hat{d}$ запишется как

$$\hat{d} = i(\hat{dx}_+\hat{q}^- + \hat{dx}_-\hat{q}^+ + \\ + d\rho_+(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_+ + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_- - 2) + d\rho_-(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_+ - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_-)). \tag{52}$$

Легко доказать следующее тождество, связывающее $\hat{c}_+$ $\hat{c}_-$:

$$e^{\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_+ - e^{-\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_- = e^{\frac{1}{2}\partial_n}e^{-i\psi}\hat{q}^+ - e^{-\frac{1}{2}\partial_n}e^{i\psi}\hat{q}^-. \tag{53}$$

Мы видим, что факторы при $d\rho_+$ и $d\rho_-$ связаны между собой. Это позволяет положить $d\rho_- = 0$ без ограничения общности. Мы имеем

$$\hat{d} = i(\hat{d}x_+\hat{q}^- + \hat{d}x_-\hat{q}^+ + d\rho_+(e^{\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_+ + e^{-\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_- - 2)). \tag{54}$$

Учитывая также равенство

$$\partial_n\hat{c}_+ - e^{-\frac{1}{2}\partial_n}\hat{c}_- = 2\operatorname{ch}\frac{i}{2}\partial_\rho, \tag{55}$$

окончательно получаем $\hat{d}$ в виде

$$\hat{d} = d\rho\left(-2i\operatorname{sh}\frac{i}{2}\partial_\rho\right) + d\rho_+\left(2i\operatorname{ch}\frac{i}{2}\partial_\rho - 2\right) + d\psi\partial_\psi \tag{56}$$

или

$$\hat{d} = d\rho_\rightarrow\overrightarrow{\partial} + d\rho_\leftarrow\overleftarrow{\partial} + d\psi\,\partial_\psi, \tag{57}$$

где

$$d\rho_\rightarrow = \frac{d\rho_+ - d\rho}{2}, \qquad d\rho_\leftarrow = \frac{d\rho_+ + d\rho}{2}. \tag{58}$$

Операторы $\overrightarrow{\partial}$ и $\overleftarrow{\partial}$ являются, соответственно, левой и правой внутренними производными в рамках развитого выше некоммутативного дифференциального исчисления. Это конечно-разностные операторы

$$\overrightarrow{\partial} = \frac{e^{\frac{i}{2}\partial_\rho} - 1}{i/2}, \qquad \overleftarrow{\partial} = \frac{e^{-i\frac{i}{2}\partial_\rho} - 1}{-i/2}. \tag{59}$$

В нерелятивистском пределе оба оператора совпадают с обычной производной ∂_ρ. Для построения дифференциального исчисления в релятивистском конфигурационном пространстве в силу специфики данного случая достаточно сохранить лишь одну из производных, например $\overleftrightarrow{\partial}$. Для этого достаточно положить $d\rho_\leftarrow = 0$. (Мы опустили нижний значок «$_\leftarrow$» при $d\rho$: $d\rho_\leftarrow = d\rho$.) Окончательно получаем $\hat{d}$ в виде

$$\hat{d} = d\rho\overrightarrow{\partial} + d\psi\,\partial_\psi. \tag{60}$$

В релятивистском дифференциальном исчислении дифференциал $d\rho$ не коммутирует с координатой ρ. Напомним, что в обычном дифференциальном исчислении ρ $d\rho$ являются независимыми численными параметрами и, безусловно, коммутируют:

$$d\rho = [\hat{d}, \rho] = [d\rho\partial_\rho, \rho] = d\rho, \qquad [d\rho, \rho] = 0. \tag{61}$$

В релятивистском исчислении

$$\hat{d}\rho = [\hat{d}, \rho] = [\hat{d}\rho\,\partial_\rho, \rho] = d\rho\frac{e^{\frac{i}{2}\partial_\rho} - 1}{i/2}\rho - \rho\,d\rho\frac{e^{\frac{i}{2}\partial_\rho} - 1}{i/2} = d\,\rho\,e^{\frac{i}{2}\partial_\rho}. \tag{62}$$

И мы получаем

$$[\hat{d}\rho, \rho] = \frac{i}{2}\hat{d}\rho. \tag{63}$$

Непосредственно из (63) следует

$$[\hat{d}\rho, f(\rho)] = \frac{i}{2}(\overrightarrow{\partial} f(\rho))\,\hat{d}\rho = \frac{i}{2}\hat{d}\rho(\overleftarrow{\partial} f(\rho)). \tag{64}$$

Выпишем релятивистские операторы кинетического импульса $\hat{\hat{k}}$ в терминах некоммутативного дифференциального исчисления, развитого выше. Для этого нам необходимо воспользоваться «некоммутативными символами Ходжа». Соответствующие соотношения можно найти в [6]. Значки «$\overrightarrow{*}$» и «$\overleftarrow{*}$» обозначают, соответственно, левый и правый некоммутативный символы Ходжа, а значок «$*$» — стандартный символ Ходжа, который относится к коммутативному дифференцированию по угловой переменной ψ

$$\hat{k}^{\pm} = \mathrm{e}^{\pm i\psi}\left(\frac{-i\rho - \dfrac{1}{2} \pm n}{2\rho}\,(\overrightarrow{*} + \overleftarrow{*})\,\hat{d}\rho - \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{i}{2}\overrightarrow{*}\hat{d}\rho\right) * \hat{d}_{\psi}\right). \tag{65}$$

Используя (65), мы можем записать релятивистский оператор энергии и уравнение Шредингера в форме, неотличимой от соответствующих нерелятивистских выражений.

Свободный релятивистский гамильтониан, записанный в терминах кинетического импульса $\hat{\hat{k}}$, имеет вид

$$\hat{H}_0 = \hat{p}^0 c = mc^2 + \frac{\hat{\hat{k}}^2}{2m}. \tag{66}$$

Потенциал взаимодействия $V(\rho)$ вводится [1] как аддитивная добавка к свободному гамильтониану, и мы окончательно получаем релятивистское уравнение Шредингера в форме

$$\left(\hat{H}_0 + V(\rho)\right)\psi(\tilde{\rho}) = E\psi(\tilde{\rho}). \tag{67}$$

Подчеркнем еще раз, что (66) и (67) нерелятивистские по форме и только конкретный вид импульсов $\hat{\hat{k}}$ как некоммутативных дифференциальных операторов позволяет увидеть, что мы имеем дело с релятивистским случаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* Quasi-potential Approach and Expansion in Relativistic Spherical Functions // Nuovo Cim. A. 1968. V. 55. P. 233.

2. *Snyder H.* Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.

3. *Snyder H.* The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time // Ibid. V. 72. P. 68.

4. *Itzykson C., Kadyshevsky V. G., Todorov I. T.* Three-Dimensional Formulation of the Relativistic Two-Body Problem and Infinite-Component Wave Equations // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 2823.

5. *Mir-Kasimov R. M.* Relation between Relativistic and Non-relativistic Quantum Mechanics as Integral Transformation // Found. Phys. 2002. V. 32. P. 607.

6. *Mir-Kasimov R. M.* V. A. Fock's Theory of Hydrogen Atom and Quantum Space // Part. Nucl. 2000. V. 31, No. 1. P. 44–52.

7. *Vilenkin N. Ya., Klimyk A. U.* Representation of Lie Groups and Special Functions. V. 1–3. N. Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 871 p.

8. *Connes A.* Non-commutative Geometry. London: Acad. Press, 1994. 673 p.

9. *Dimakis A., Müller-Hoissen F., Striker T.* Non-commutative Differential Calculus and Lattice Gauge Theory // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26. P. 1927.

Получено 11 февраля 2010 г.