Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 6(162). С. 658–666

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ОЦЕНКА ПЕРИОДА ПОЛУРАСПАДА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МАТЕРИНСКИМ И ДОЧЕРНИМ ЯДРАМИ

В. Б. Злоказов, Ю. С. Цыганов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе предложен алгоритм для оценки периода полураспада дочернего ядра в случае, когда неизвестно, какое ядро является для него материнским («неопределенное время старта»). Для распада «дочери» в момент t мы можем определить вероятность такого распада, если предположим, что каждая «мать», распавшаяся до t, имеет равные шансы быть «матерью» данной «дочери»:

$$\sum_{i=1}^{n_t} \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right),$$

где τ — время жизни «дочери», а n_t — их общее число; t_i — момент распада «матери» такой, что $t_i \leqslant t$. Мы можем теперь рассматривать эту формулу как функцию отношения «мать–дочь» для нашего случая и, в принципе, можем построить оценку для величины τ:

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{n_t} w_i \frac{t-t_i}{n_t}, \quad w_i = \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right), \quad i = 1, \ldots, n_t,$$

где веса w_i нормированы на их сумму для каждого t. Усредненная сумма таких оценок по всем распадам «дочери» и даст нам окончательную оценку параметра τ.

An algorithm has been proposed to build an estimate of the half-life of a «daughter» nucleus in case when it is unknown which nucleus is its «mother» («indefinite start time»). For a decay of the «mother» at an instant t we can determine a probability of such a decay, if we assume that each «mother» which has been decayed before t has equal chances to be «mother» of this «daughter»:

$$\sum_{i=1}^{n_t} \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right),$$

where τ is the life-time of the «daughter» and n_t is their total number; t_i is the instant of the «mother» decay, such that $t_i \leqslant t$. We can consider this formula as a function of the «mother–daughter» relation for our case, and, in principle, build an estimator of the τ quantity:

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{n_t} w_i \frac{t-t_i}{n_t}, \quad w_i = \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right), \quad i = 1, \ldots, n_t,$$

where the weights w_i have been normalized by their sum for each t. The averaged sum of such estimates over all the «daughter» decays will give us the final estimate of the τ parameter.

PACS: 02.70.-c

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен алгоритм для оценки периода полураспада дочернего ядра в случае, когда неизвестно, какое ядро является для него материнским («неопределенное время старта»).

Можно указать две важных области экспериментальной физики, где возможно применение этого алгоритма.

Одна из них — изучение эффекта Зенона [1]. Этот эффект проявляется в том, что, как показало исследование нестабильных систем, проведенное Халфином [1], скорость распада квазистационарного состояния не следует точно экспоненциальному закону. Возможность таких неэкспоненциальных распадов следует из общих квантово-механических соображений. Отклонения от экспоненциального закона ожидаются для очень коротких и очень длинных временных интервалов после установления квазистационарных состояний [2].

Фонда и др. [3] проанализировали модель распада и показали, что при определенных условиях значительные отклонения от экспоненциального закона могут иметь место в интервале около 10 периодов полураспада, а преобладание инверсного степенного закона — в интервале около 25 периодов полураспада.

Другая область — это получение оценки периода полураспада ядер из данных о связанных recoil-alpha последовательностях в индуцированных тяжелыми ионами ядерных реакциях.

Об интервале коротких времен следует заметить, что наблюдение цепей $^{220}\mathrm{Rn} \leftrightarrow {}^{216}\mathrm{Po}$ позволяет очень успешно изучать эти эффекты благодаря относительно короткому периоду полураспада ^{216}Po, что означает, что здесь нет необходимости использовать время на пучке [4]. В силу этого целью настоящей работы было развитие математического метода для оценивания периода полураспада из интервала коротких времен. Пока речь идет об экспоненциальных распадах.

1. ПРОСТЕЙШИЙ ПОДХОД

Пусть в некоторой области поддерживается относительно постоянная концентрация радона ^{220}Rn, который претерпевает альфа-распад с периодом 55,61 с. Дочерний продукт полоний ^{216}Po тоже претерпевает альфа-распад с некоторым неизвестным периодом полураспада. Времена распадов как радона, так и полония регистрируются; также регистрируются энергии альфа-частиц в объеме телесного угла порядка 80 % от 4π, что позволяет более-менее надежно идентифицировать изотопное имя продуктов распадов. Но неизвестно, от какого атома радона происходит каждый атом полония, а стало быть, неизвестны и нули отсчетов времени его распада. Это не дает возможности измерить истинные времена таких распадов и тем самым оценить период полураспада полония методом максимального правдоподобия.

В то же время в условиях нашего эксперимента невозможно использование и методов анализа зависимости амплитудных распределений от времени, поскольку и распределение радона, и распределение полония с точностью до статистических флуктуаций являются константами, в явной форме не связанными с периодами полураспада обоих изотопов.

Упорядочим по времени регистрации массивы распадов радия и полония и будем считать, что распределение времен распада радона является равномерным на интервале $[0, T_m]$, а распады полония описываются, как обычно, функцией распределения

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-t/\tau), & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

действующей на интервале $[t_0, T_m]$, где t_0 — нуль отсчета (в частности, $t_0 = 0$), а τ — период полураспада ^{216}Po, подлежащий определению. Точнее, τ — это время жизни, но в дальнейшем ради простоты записи формул мы под периодом полураспада будем понимать его. Между обоими понятиями простая связь $T_{1/2} = \ln(2)\tau$.

Пусть данные — это зарегистрированные m распадов радия и n распадов полония. В этом случае среднее время между двумя распадами радона равно $T_d = T_m/m$. «Средняя» вероятность распада полония за это время равна $\exp(-T_d/\tau)$, и если эта величина существенно меньше единицы, то основная масса распадов полония будет хаотичным образом перемешана с распадами радона.

В данной работе для решения проблемы предлагается следующий подход.

Предположим, что нам известно, что период полураспада полония неизмеримо меньше, чем величина T_d. Это значит, что вероятность распада за это время сколь угодно близка к 1. Тогда можно считать, что весьма вероятной матерью для данного полония будет ближайший к нему радон слева.

Отсюда возникает следующая идея алгоритма 1 построения оценки τ. Учитывая, что если есть множество времен распада t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i/m$ будет одновременно оценкой и максимального правдоподобия, и наименьших квадратов, находим последовательно для каждого i-го полония ближайший к нему слева j_i-й радон и строим множество разностей $t_i - t_{ji}$. Их среднее

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i - t_{ji}}{n} \tag{1}$$

и будет МНК-оценкой τ, а $\ln(2)\tau$ оценкой $T_{1/2}$. Эту оценку будем условно называть pile-up оценкой величины τ.

2. ПРИМЕНЕНИЕ КОНЦЕПЦИИ РАНДОМИЗАЦИИ

Оценка (1) будет работать хорошо, если τ полония неизмеримо меньше T_d, так что она может быть несколько раз уложена в эту величину; другими словами, если полоний успеет за время T_d распасться с очень большой вероятностью. Иначе распады радона и полония будут перемешаны весьма хаотически, и оценка окажется очень сильно заниженной.

Мы можем ввести меру такой хаотичности, или, иначе, физической коррелированности распадов обоих изотопов, и ее можно определить разными способами, например, таким:

$$h_1 = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|k_i - 2n/(m+n)|}{m},$$

где k_i — число атомов полония, попавших между i-м и $(i+1)$-м распадами радона. В крайнем случае, если в этот промежуток попадает в среднем $2n/(m+n)$ распадов полония, то мера h_1 будет сколь угодно близкой к нулю. Соответственно, чем больше она отличается от нуля, тем хаотичнее перемешаны распады.

Другой мерой хаотичности смеси распадов может служить h_2 — разность единицы и отношения числа зарегистрированных распадов полония к числу распадов радона: чем дальше она от нуля, тем хаотичнее смесь.

С помощью $h_1,\ h_2$ мы можем сразу же оценить шансы оценки (1) на успех, и если обе ближе к 1, чем к 0, надо будет строить другую оценку.

Попробуем действовать так: вместо единичной вероятности ближайшего к полонию слева радона быть «матерью» того, будем использовать набор вероятностей, с которыми все радоны, предшествующие данному полонию, могут быть его «матерью», и строить оценку τ суммированием, как в (1), получающихся разностей с разными весами, пропорциональными этим вероятностям.

Предположим сначала, что нам известна τ полония. Для данного распада полония в момент t мы не знаем, от какого радона произошел этот распад, но мы можем определить вероятность распада полония в момент t, если предположим, что каждый радон, распавшийся до t, имеет равные шансы быть «матерью» данного полония.

Эта вероятность равна

$$\sum_{i=1}^{n_t} \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right), \tag{2}$$

где t_i — момент распада радона, такой, что $t_i \leqslant t$, а n_t — их общее число.

Мы можем теперь рассматривать (2) как оценку функции отношения «мать–дочь» для нашего случая, и, в принципе, можем построить оценку для величины τ:

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{m_t} w_i \frac{t-t_i}{m_t}, \tag{3}$$

где веса w_i равны

$$w_i = \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right), \quad i = 1, \ldots, m_t, \tag{4}$$

и нормированы на их сумму для каждого t.

Усредненная сумма таких оценок по всем распадам полония и даст нам окончательную оценку параметра τ.

Правда, для построения весов (4) нам уже необходимо значение τ, а как раз его-то мы и хотим определить. Здесь можно воспользоваться обычным в таких случаях приемом: взяв какую-либо априорную оценку τ, например, ее pile-up оценку (благо, последняя не зависит от точного предварительного значения τ), мы далее можем построить итерационный процесс уточнения τ и в случае его сходимости взять результат в качестве искомой оценки.

Эффективность этой оценки существенно выше, чем предыдущей для больших h, и в меньшей степени зависит от соотношения τ радона и полония. Но все же предположение о равной вероятности любого радона-предшественника быть «матерью» полония малореалистично. Целесообразнее трактовать величины (4) как обобщенные веса для итерационной процедуры на основе (3) и выбирать эти веса как на основе априорной информации о времени жизни полония, так и с учетом величины T_d. В качестве простейшего подхода можно рекомендовать следующий выбор весов:

$$w_{m_i} = 1, \quad w_i = \exp\left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m_i - 1. \tag{5}$$

Здесь t_i — времена распада радона, предшествующие распаду полония, и все w_i нормируются на их сумму, а смысл каждого w_i — это вероятность для полония распасться в интервале t_i, t_{i+1} и не распасться до него.

Соответственно, оценка τ строится как нормированная сумма всех взвешенных сумм по всем распадам полония

$$\hat{\tau} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} w_i \frac{t_j - t_i}{n}. \tag{6}$$

Здесь t_j — распады полония, а t_i — радона, предшествующие распаду полония t_j.

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Элементы субъективного произвола при выборе весов, а тем самым при установлении отношения «мать–дочь», не дают возможности построить обычную меру статистической точности (смещение, дисперсия) оценки (6). Тем не менее можно построить условную формальную меру точности по правилам распространения ошибки в формуле (6). В этой формуле источники ошибок — величины w_i и $t_j - t_i$. Неточность второй величины — обычная дисперсия $t_j - t_i$, равная

$$v_r^2 + \tau^2, \tag{7}$$

поскольку наборы величин t_j и t_i ввиду отсутствия точного знания о попарной генетической связи между ними можно считать статистически независимыми; здесь v_r^2 — дисперсия распада радона.

Неточность первой величины — w_i — зависит от тех же самых величин (7), но довольно замысловатым образом. Постараемся проследить всю цепочку формирования этой неточности.

Сначала выведем формулу для распределения $d = t_j - t_i$ при условии положительности разностей (поскольку эти времена упорядочены). Итак, имеем две величины для радона (R) и полония (P), подчиненные экспоненциальному распределению на $[0, \infty]$ с плотностями $b \exp(-bt)$ и $a \exp(-at)$. Здесь $b = 1/\tau_R$ и $a = 1/\tau_P$ — такая запись удобнее для анализа.

Мы можем определить характеристическую функцию (ХФ) для d.

$$f_d(t) = f_P(t) f_R(-t),$$

$$f_P(t) = \int_0^{\infty} \exp(ixt) a \exp(-ax)\, dx = \frac{a}{a - it}.$$

Отсюда легко видеть, что $f_R(t) = b/(b+it)$, и можно заключить, что ХФ для d равна

$$f_d(t) = \frac{a}{a-it}\frac{b}{b+it}. \tag{8}$$

Это выражение может быть переписано так:

$$\frac{ab}{(a-it)(b+it)} = \frac{b}{(a+b)}\frac{a}{(a-it)} + \frac{a}{(a+b)}\frac{b}{(b+it)}. \tag{9}$$

Выражение (9) есть характеристическая функция такой плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} b \exp(-bx), & \text{если} \quad x < 0; \\ \dfrac{b}{a+b} a \exp(-ax) & \text{— иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

(10) является распределением случайной величины экспоненциального типа, которая с параметром a (уменьшаемое в разности d) определена с вероятностью $b/(a+b)$ на положительной полуоси и с параметром b (вычитаемое) с вероятностью $a/(a+b)$ на отрицательной.

В таком случае выражение $\dfrac{b}{a+b} a \exp(-ax)$, $x \in [0, \infty)$, и будет искомой плотностью функции распределения положительной разности d, так что мы можем определить ее среднее и дисперсию: они будут пропорциональны среднему и дисперсии исходного распределения уменьшаемого (полоний в нашем случае) с коэффициентами $b/(a+b)$ и $(b/(a+b))^2$ соответственно, т. е.

$$\hat{E}d = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right) \quad \hat{V}d = \left(\frac{1}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \tag{11}$$

А теперь рассмотрим распределение величины $\xi = \exp(-bx)$, где x распределена по экспоненциальному закону $1 - \exp(-at)$. Можно показать, что

$$P(\xi < t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t > 1, \\ t^{(a/b)}, & \text{если} \quad t \in [0, 1], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Действительно, при $t \in [0, 1]$

$$(\exp(-bx) < t) \equiv \left(-x < \frac{\ln(t)}{b}\right) \equiv \left(x > -\frac{\ln(t)}{b}\right).$$

Вероятность последнего события будет равна

$$1 - \left(1 - \exp\left(-\left(-a\,\frac{\ln(t)}{b}\right)\right)\right) = \exp(\ln(t^{(a/b)})) = t^{(a/b)}.$$

Соответственно, плотность этой вероятности будет равна $\dfrac{a}{b} t^{(a-b)/b}$.

Отсюда находим среднее и дисперсию ξ:

$$\hat{E}\xi = \int_0^1 \frac{a}{b} t^{(a-b)/b+1} dt = \frac{a}{a+b}, \quad \hat{E}\xi^2 = \int_0^1 \frac{a}{b} t^{(a-b)/b+2} dt = \frac{a}{a+2b},$$
$$\hat{V}\xi = \frac{a}{a+2} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{ab^2}{(a+2b)(a+b)^2}, \quad \hat{\sigma}\xi = \sqrt{\frac{a}{a+2b}}\frac{b}{a+b}. \tag{12}$$

В частном случае, когда $b \ll a$, выражение (12) может быть записано так:

$$\hat{V}\xi = \frac{z^2}{(1+2z)(1+z)^2}, \quad \hat{\sigma}\xi = \sqrt{\frac{1}{1+2z}}\frac{z}{1+z},$$

где $z = b/a$. Отсюда мы видим, что предел дисперсии (а также и сигмы) при $z \to 0$ равен

$$\lim_{z\to 0} \hat{V}\xi = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(1+2z)(1+z)^2} = 0. \tag{13}$$

Соответственно, мы можем записать дисперсию (6) так:

$$\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} \hat{V}(w_i)(t_j - t_i)^2 + w_i^2 \hat{V}(t_j - t_i)\right), \tag{14}$$

где $\hat{V}(w_i)$ вычисляются по формулам (12) с соответствующими математическими ожиданиями для разностей между распадами. Если имеет место $b \ll a$, то из (13) следует, что, в принципе, случайную величину w_i можно считать приближенно постоянной, и тогда (14) упрощается,

$$\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} w_i^2 \hat{V}(t_j - t_i)\right).$$

Возникает вопрос: если (14) является лишь условной мерой точности, то какая от нее польза; ведь доверительный интервал, построенный с ее помощью, не накрывает истинного значения с абсолютной гарантией?

Здесь следует напомнить, что другой, кроме условной, меры точности в практике статистического оценивания не существует: если получена оценка параметра m и ее дисперсия σ^2, то доверительный интервал $m \pm \sigma$ накрывает истинное значение параметра с вероятностью примерно 2/3 (в случае нормального распределения). Это в лучшем случае одного параметра, а если таких параметров будет, например, 10, то доверительная область накроет истинный вектор параметров с вероятностью $2/3^{10}$ — это что-то чуть больше 0,01; т. е., образно говоря, МНК-анализ с 10 параметрами, выстрелив 100 раз, попадет точно в цель лишь один раз.

Другая неприятность связана с нелинейным характером параметризаций, который в основном используется в ядерной физике.

Для получения дисперсий сложных выражений от параметров их приходится линеаризовать, т. е. в разложении нелинейной функции в ряд Тейлора оставлять лишь линейную часть и отбрасывать нелинейные члены. Естественно, что дисперсия линейного члена функции является лишь частью полной дисперсии и будет более или менее совпадать с последней лишь, если в области значений случайной величины, задаваемой этой полной дисперсией, нелинейными членами действительно можно пренебречь без большого ущерба для вычислений.

Это относится также и к нелинейному МНК, что объясняет часто наблюдаемую на практике заниженную оценку ошибок нелинейных параметров.

И, наконец, при вычислении дисперсий составных выражений часто приходится пренебрегать корреляциями между их элементами (они, как правило, неизвестны), что тоже увеличивает неточность оценки ошибки.

Польза от мер точности в том, что они обосновывают мнение, что если один экспериментатор получил для своей оценки параметра точность Δ, а другой $\Delta/2$, то оценка параметра у другого точнее, чем у первого.

4. ПРИМЕРЫ

Таблица содержит результаты применения алгоритма к моделированным данным. Были взяты 100 ядер Ra и 100 ядер Po, а величина T_d была положена равной 30 временным единицам (tu).

T_{pol}	$T_{\text{pile-up}}$	τ	P_{decay}	δ
15	10,21	15,20	0,8647	1,12
30	15,54	29,67	0,6321	1,70
100	22,00	75,66	0,2592	3,10
200	28,12	130,24	0,1393	3,97

T_{pol} — время жизни полония (в tu); $T_{\text{pile-up}}$ — усредненная простая оценка; τ — усредненная оценка, даваемая описанным алгоритмом; P_{decay} — вероятность распада полония в интервале времени $[0, T_d]$; δ — условная статистическая мера точности (14).

Можно видеть, что оценка $T_{\text{pile-up}}$ чрезмерно занижена. Оценка τ хороша, если вероятность распада в $[0, T_d]$ больше, чем 0,5, иначе величина τ может рассматриваться лишь как оценка нижней границы времени жизни полония (она все же лучше, чем $T_{\text{pile-up}}$).

5. ВЫВОДЫ

Описанный подход оправдан для оценки времени жизни τ, если оно не превосходит многократно величину T_d. В противном случае получаемые оценки τ окажутся сколь угодно сильно заниженными.

Если это превосходство очень велико, оценка оказывается заниженной, но она может рассматриваться как оценка нижней границы для этого периода.

И, конечно, этот метод может быть применен в экспериментах с ядерными реакциями полного слияния, индуцированными тяжелыми ионами, если обнаруживаются последовательности редких распадов recoil-alpha (и/или спонтанного деления) и если при этом наблюдается более одного статистически значимого recoil-кандидата для таких событий.

Авторы выражают благодарность за помощь в работе сотрудникам ЛЯР ОИЯИ Ю. В. Лобанову, В. И. Чепигину, А. Н. Полякову и сотруднику INS VINChA (Сербия) К. Субботичу.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ № 09-02-12060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халфин А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. С. 1371.
2. *Novcovic D. et al.* // Nucl. Instr. Meth. A. 2006. V. 566. P. 477–480.
3. *Fonda L. et al.* // Rep. Prog. Phys. 1978. V. 41. P. 587.
4. *Nadderd L. et al.* // Proc. of NEC’2007 Intern. Symp., Varna, Bulgaria, Sept. 10–17, 2007. Dubna, 2008. P. 362–366.

Получено 10 декабря 2009 г.