

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ И КОРРЕКЦИИ АМПЛИТУДНОЙ ФУНКЦИИ В КОЛЬЦЕВЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

*П. Р. Зенкевич, А. В. Бархударян*

ФГУП «ГНЦ РФ ИТЭФ», Москва

Свободные колебания частиц в фокусирующей системе кольца с переменным градиентом описываются амплитудной функцией (бета-функцией) и фазовой функцией. Возмущения градиента приводят к искажениям этих функций. Искажения бета-функции (ИБФ) уменьшают акцептанс кольца, особенно если рабочая точка на клетке бетатронных частот приближается к полуцелому резонансу. Предложен новый метод расчета токов в обмотках корректирующих квадрупольных линз. Идея метода состоит в возбуждении искажений замкнутой орбиты (ИЗО) с помощью дипольного магнита. Сравнение измеренных значений ИЗО в мониторах положения орбиты (пикапах) с расчетными значениями ИЗО для идеальных градиентов позволяет рассчитать резонансные гармоники ИБФ и затем скорректировать их с помощью квадрупольных корректоров. Описан алгоритм метода и предварительные результаты его применения к синхротрону SIS 100.

Free oscillations of particles in the rings focusing system with a variable gradient are described by the amplitude function (beta-function) and phase function. The gradient perturbation leads to distortions of these functions. Distortions of beta-function reduce the ring acceptance, especially if the working point on the cell betatron frequency is close to half-integer resonance. A new method for currents calculating in the windings of correcting quadrupole lenses is presented. The idea of the method consists in the excitation of the closed orbit with the dipole magnet. Comparison of measured values of these orbits in pickup with the calculated values for the ideal gradients give an opportunity to calculate the resonant harmonics of the beta-function distortions and then adjust them using quadrupole correctors. The method algorithm and preliminary results of its application to the synchrotron SIS 100 are given.

PACS: 29.90.+r

### ВВЕДЕНИЕ

Свободные колебания частиц в кольцевом ускорителе выражаются через амплитудную функцию (бета-функцию) и фазовую функцию. Акцептанс кольца  $\varepsilon_{x,y}$  ( $x, y$  — поперечные отклонения от идеальной орбиты) связан с бета-функцией соотношением

$$\varepsilon_{x,y} = \min \left[ \frac{A_{x,y}(s)^2}{\beta_{x,y}(s)} \right], \quad (1)$$

где  $s$  — длина, отсчитываемая вдоль орбиты;  $A_{x,y}(s)$  — максимальная амплитуда свободных колебаний;  $\beta_{x,y}(s)$  — соответствующая бета-функция.

Если градиент фокусирующего магнитного поля идеален, бета-функция совпадает с расчетной; однако в присутствии возмущений градиента возникают искажения бета-функции и фазовой функции. Эти искажения приводят к уменьшению акцептанса кольца и потерям частиц; наибольший вклад дают резонансные гармоники с номером, близким к  $k \approx 2Q$ , где  $Q$  — бетатронная частота. Возбуждение этих гармоник особенно опасно для пучков с высокой интенсивностью, в которых кулоновский сдвиг бетатронной частоты приводит к приближению к ближайшему параметрическому резонансу или даже к его пересечению.

Коррекция резонансных гармоник была выполнена в ИТЭФ много лет тому назад [1]. Для коррекции использовались четыре обмотки: «синусная» и «косинусная» обмотки для двух степеней свободы. Токи в этих обмотках выбирались с использованием метода «черного ящика»: для каждой обмотки экспериментально исследовалась зависимость средней интенсивности ускорителя от тока; затем выбиралось значение тока, соответствующее максимальной интенсивности. Несмотря на примитивный характер процедуры, с ее помощью удалось добиться заметного повышения интенсивности (около 20 %).

В данной работе мы предлагаем метод расчета искажений бета-функции по информации, полученной от пикап-мониторов. Идея метода состоит в искусственном возбуждении искажений замкнутой орбиты с помощью дипольного магнита и сравнении измеренных значений ИЗО со значениями, рассчитанными для идеального градиента. Значения фурье-гармоник ИБФ могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов. Затем эти искажения могут быть скорректированы с помощью специальных квадрупольных линз. Приведен алгоритм метода и результаты численного моделирования для синхротрона SIS100.

## 1. ИСКАЖЕНИЯ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ ФУНКЦИИ ИЗ-ЗА ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАДИЕНТА

В линейном приближении уравнение поперечных колебаний частиц в кольцевом ускорителе имеет следующий вид [2]:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = 0. \quad (2)$$

В этом уравнении  $y$  — поперечная координата; независимая переменная  $s$  — расстояние вдоль орбиты (все переменные измеряются в м); фокусирующий член  $K(s) = \frac{1}{R(s)^2} + \frac{G(s)}{BR}$  для горизонтального движения и  $K(s) = -G(s)/BR$  для вертикального движения; градиент магнитного поля  $G(s) = \frac{\partial B_z(x)}{\partial x}$ ;  $BR$  — магнитная жесткость (Тл·м);  $R(s)$  — радиус кривизны орбиты. Общее решение уравнения (2) записывается в следующем виде:

$$y = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \alpha). \quad (3)$$

Здесь  $a$  и  $\alpha$  — амплитуда и фаза свободных колебаний;  $\beta(s)$  и  $\mu(s)$  — соответственно амплитудная функция (бета-функция) и фазовая функция. Фазовая функция  $\mu(s)$  связана с бета-функцией соотношением  $\mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$ ; бетатронная частота  $Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)}$ ,

где  $C$  — длина кольца. Периодическая часть фазовой функции определяется формулой  $\mu_{\text{пер}}(s) = \mu(s) - Q(s/R)$  (здесь  $R$  — средний радиус кольца). Альтернативная форма решения записывается через комплексные функции Флоке  $\phi(s)$ :  $y = A\phi(s) + \text{C.C.}$  (здесь  $A$  — комплексная константа,  $\text{C.C.}$  означает комплексно-сопряженную величину). Модуль и фаза функции Флоке связаны с бета-функцией и фазовой функцией следующими формулами:  $g(s) = |\phi(s)| = \sqrt{\beta(s)\Delta}$ ,  $\Delta = 1$  м;  $\mu(s) = \arg[\phi(s)]$ . Периодическая часть функции Флоке:  $\Phi(s) = g(s) \exp[i\mu_{\text{пер}}(s)]$ .

В присутствии возмущений градиента ( $K(s) = K_0(s) + \Delta K(s)$ ) бета-функция и фазовая функция также изменяются:  $\beta(s) = \beta_0(s) + \Delta\beta(s)$ ,  $\mu(s) = \mu_0(s) + \Delta\mu(s)$ . Отметим, что изменение бета-функции связано с изменением фазовой функции соотношением  $\Delta\mu(s) \approx -\int_0^s \frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)^2} ds$ .

Мы можем выразить  $\Delta\beta(s)$  через  $\Delta K(s)$  с помощью следующего алгоритма: 1) переход к переменным Куранта–Снайдера [2]  $\theta = \frac{1}{Q_0} \int_0^s \frac{\Delta}{\beta_0(s)} ds$ ,  $Y = \frac{y}{g_0(s)}$  (после этой операции уравнение (2) записывается в форме уравнения колебаний с частотой  $Q_0$ ); 2) введение новой переменной  $G = |Y|$  (параметр  $G$  имеет физический смысл безразмерной огибающей); 3) разложение правой части этого уравнения в ряд Фурье; 4) линеаризация этого уравнения ( $G = G_0 + \Delta G$ ). Тогда мы получим следующую формулу:

$$\Delta G = \frac{1}{2} \frac{\Delta\beta}{\beta_0(s)} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k \cos k\theta + v_k \sin k\theta}{4Q_0^2 - k^2}, \quad (4)$$

где амплитуды фурье-гармоник

$$\begin{cases} u_k = \frac{Q_0^{3/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta_0(s)^2 \Delta K(s) \cos k\theta d\theta, \\ v_k = \frac{Q_0^{3/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta_0(s)^2 \Delta K(s) \sin k\theta d\theta. \end{cases} \quad (5)$$

Изменение фазовой функции  $\Delta\mu(\theta) \approx -2Q_0 \int_0^\theta \Delta G(\theta) d\theta$ . Подставляя уравнение (4), получим

$$\Delta\mu(\theta) = -2Q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k \sin k\theta + v_k (1 - \cos k\theta)}{k(4Q_0^2 - k^2)} + \Delta Q\theta. \quad (6)$$

Периодическая часть фазовой функции  $\mu_{\text{пер}}(\theta) = \mu(\theta) - Q(s/R)$ ; таким образом:

$$\Delta\mu_{\text{пер}}(\theta) = 2Q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k \sin k\theta + v_k (1 - \cos k\theta)}{k(4Q_0^2 - k^2)}. \quad (7)$$

Проверка теории была сделана для структуры синхротрона SIS100 [3]. Тонкая квадрупольная линза была размещена в точке с  $s_0 = 0$ ; сила линзы  $\alpha_l = 0,05 \text{ м}^{-1}$ . С помощью кода MADX для SIS100 были рассчитаны функции  $\beta_0(\theta)$ ,  $g_0(\theta)$ ,  $\mu_0(\theta)$  и их искажения

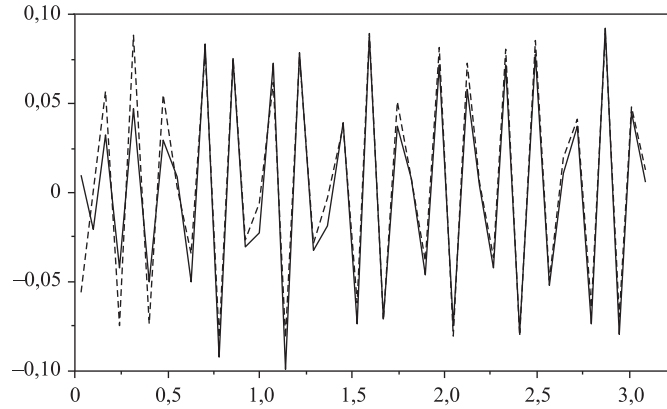


Рис. 1. Расчетные значения  $\Delta g_0(\theta)/g_0(\theta)$ : штриховая кривая соответствует вычислениям по MADX, сплошная кривая рассчитана с помощью уравнения (4)

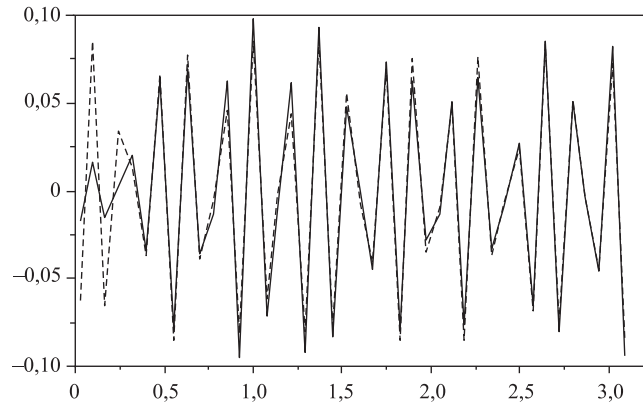


Рис. 2. Расчетные значения  $\Delta\mu_{\text{per}}(\theta)$ : штриховая кривая соответствует вычислениям по MADX, сплошная кривая рассчитана с помощью уравнения (4)

$\Delta\beta_0(\theta)$ ,  $\Delta g_0(\theta)$ ,  $\Delta\mu_{\text{per}}(\theta)$ . Затем с помощью выведенных уравнений были рассчитаны коэффициенты разложения функций  $\Delta G(\theta) = \Delta g_0(\theta)/g_0(\theta)$  и  $\Delta\mu_{\text{per}}(\theta)$  в ряд Фурье по  $\theta$ . С учетом симметрии мы найдем, что  $v_k = 0$ . Для расчетов использовались гармоники с номерами 32–37 (рабочая точка соответствует  $Q_0 = 17,3$ ). Результаты расчетов даны на рис. 1, 2. Мы видим, что прямые вычисления подтверждают правильность теории.

## 2. ИСКАЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДИПОЛЬНЫМ МАГНИТОМ В ПРИСУТСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАДИЕНТА

Искажения замкнутой орбиты (closed orbit distortions — COD), возбуждаемые дипольным магнитом, определяются периодическим решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = \alpha\delta(s - s_0). \quad (8)$$

С помощью метода вариации постоянных получим

$$y = Ag(s)F(s, s_0) \exp[i\mu(s)] + \text{C.C.} \quad (9)$$

В этом уравнении

$$F(s, s_0) = \begin{cases} s \leq s_0, \\ \exp(-2\pi i Q), s > s_0, \end{cases} \quad (10)$$

и комплексная константа

$$A = \frac{\alpha \cdot \exp(\pi i Q)}{4 \sin \pi Q} \Phi^*(s_0) \exp\left(-iQ \frac{s_0}{R}\right) = A_1 + iA_2. \quad (11)$$

Заметим, что  $|F(s, s_0)| = 1$ ,  $\arg(F(s, s_0)) = \theta(s, s_0)$ . Рассмотрим разность между решением в присутствии возмущений градиента и решением при идеальном градиенте:  $\Delta y(s) = y(s) - y_0(s)$ . Для идеального градиента

$$A_0 = \frac{\alpha \cdot \exp(\pi i Q_0)}{4 \sin \pi Q_0} \Phi_0^*(s_0) \exp\left(-iQ_0 \frac{s_0}{R}\right). \quad (12)$$

В присутствии возмущений градиента  $A = A_0 + \Delta A$ ,  $A_1 = A_{1,0} + \Delta A_1$ ,  $A_2 = A_{2,0} + \Delta A_2$ . Для улучшения точности предположим, что бетатронная частота известна. Линеаризуя по малым изменениям параметров, получим, что

$$\Delta y(s) = g_0(s) \exp\left[i\left[\mu_{\text{per},0}(s) + Q \frac{s}{R}\right] F(s, s_0) [\Delta A + A_0 (\Delta G + i\Delta\mu_{\text{per}})]\right] + \text{C.C.}$$

Выделяя действительную часть, получим

$$\Delta y(s) = 2g_0(s) \left\{ \Delta A_1 \cos(\vartheta(s, s_0)) - \Delta A_2 \sin(\vartheta(s, s_0)) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k A_k(s, s_0) + v_k B_k(s, s_0)) \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $\vartheta(s, s_0) = \mu_{\text{per},0} + Q(s/R) + \arg[F(s, s_0)]$ ; функции  $A_k(s, s_0)$  и  $B_k(s, s_0)$  определяются следующими формулами:

$$\begin{cases} A_k(s, s_0) = \frac{|A_0|}{4Q_0^2 - k^2} \left\{ \cos k\theta(s) \cos[\vartheta(s, s_0) + \alpha] - \frac{2Q}{k} \sin k\theta(s) \sin[\vartheta(s, s_0) + \alpha] \right\}, \\ B_k(s, s_0) = \frac{|A_0|}{4Q_0^2 - k^2} \left\{ \sin k\theta(s) \cos[\vartheta(s, s_0) + \alpha] - \frac{2Q}{k} (1 - \cos k\theta(s)) \sin[\vartheta(s, s_0) + \alpha] \right\}. \end{cases} \quad (14)$$

В уравнении (14)  $\alpha = \arg(A_0)$ . Рассмотрим набор датчиков положения пучка (ДПП), размещенных в точках с координатами  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ). Мы можем сконструировать следующую квадратичную форму:

$$IS = \sum_j [\Delta y_{\text{mes}}(s_j) - \Delta y(s_j)]^2. \quad (15)$$

Дифференцируя по  $A_1$ ,  $A_2$  и  $u_k$ ,  $v_k$ , мы получим систему однородных линейных уравнений относительно этих переменных. Эта система имеет единственное решение, если число ДПП  $M \geq 2K_0 + 2$ , где  $K_0$  — число гармоник, подлежащих определению.

### 3. ВЫБОР СИЛЫ КВАДРУПОЛЬНЫХ КОРРЕКТОРОВ

Процедура коррекции осуществляется с помощью набора тонких квадрупольных линз (квадрупольных корректоров). Отметим, что каждый корректор одновременно меняет горизонтальную и вертикальную амплитудные функции. Для корректора с номером  $m$  мы имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2(\Delta G_x)}{d\theta_x^2} + 4Q_x^2 \Delta G_x = Q_x^{3/2} (\beta_x^0)^2 \alpha_m \delta(\theta_x - \theta_x^m), \\ \frac{d^2(\Delta G_y)}{d\theta_y^2} + 4Q_y^2 \Delta G_y = -Q_y^{3/2} (\beta_y^0)^2 \alpha_m \delta(\theta_y - \theta_y^m). \end{cases} \quad (16)$$

Решение определяется уравнением (4). Амплитуды гармоник, создаваемых нашей системой корректоров, определяются формулами

$$\begin{cases} u_{x,y}^k = \sum_m \alpha_m \Upsilon_{x,y}^{k,m}, \\ v_{x,y}^k = \sum_m \alpha_m \Psi_{x,y}^{k,m}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{cases} \Upsilon_{x,y}^{k,m} = \frac{1}{\pi} \frac{Q_{x,y}^{3/2}}{4Q_{x,y}^2 - k^2} (\beta_{x,y}^0)^2 \cos k\theta_{x,y}^m, \\ \Psi_{x,y}^{k,m} = \frac{1}{\pi} \frac{Q_{x,y}^{3/2}}{4Q_{x,y}^2 - k^2} (\beta_{x,y}^0)^2 \sin k\theta_{x,y}^m. \end{cases} \quad (18)$$

Силы корректоров выбираются так, чтобы для заданного набора гармоник сделать амплитуды равными нулю. Таким образом, мы имеем четыре системы линейных уравнений для расчета сил линз  $\alpha_m$ . Для сохранения бетатронных частот необходимо добавить два дополнительных уравнения. Мы видим, что для коррекции  $K_0$  гармоник по двум степеням свободы необходимо иметь следующее число квадрупольных линз:  $N_{\text{quad}} \geq 4K_0 + 2$ .

Другой способ коррекции состоит в применении так называемых гармонических цепей, каждая из которых создает косинусную или синусную гармонику с заданным номером, не изменяя бетатронных частот.

### 4. АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ

Предложенная процедура коррекции включает следующие операции:

- измерение COD во всех датчиках положения пучка ( $Y_j$ , где  $j$  — номер датчика);
- возбуждение колебаний орбиты с помощью дипольного магнита с известными характеристиками (силой и эффективной длиной);
- измерение COD во всех датчиках положения пучка при включенном магните ( $y_j$ );
- вычисление разности этих двух орбит:  $\delta y_j = Y_j - y_j$ ;
- расчет для всех датчиков параметра  $y_j^0$  — отклонения орбиты в датчике с номером для идеального градиента при заданном возмущении орбиты;
- расчет разности между этими параметрами:  $\Delta y_j = \delta y_j - y_j^0$ ;
- расчет амплитуд косинусных и синусных гармоник ИБФ по значениям параметра  $\Delta y_j$  для гармоник с выбранными номерами с помощью метода наименьших квадратов;

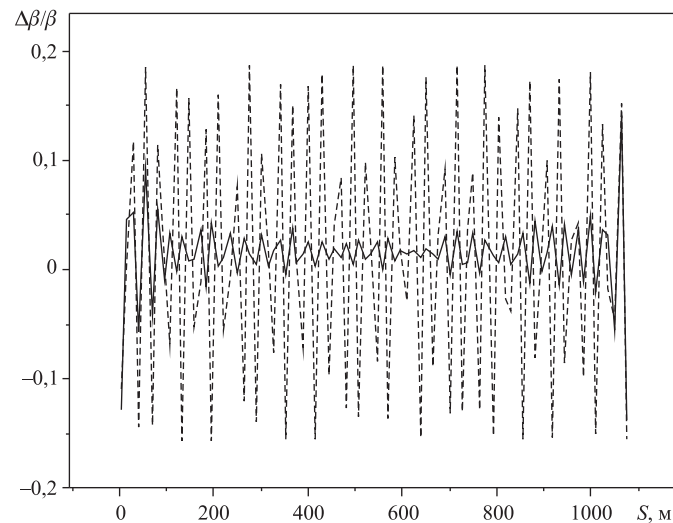


Рис. 3. Возмущения амплитудной функции  $\Delta\beta(s)/\beta_0(s)$  для дельтаобразного возмущения градиента. Штриховая кривая — без коррекции, сплошная кривая — с коррекцией 32–37 гармоник искажений бета-функции

- повторение процедуры для другой степени свободы;
- расчет сил квадрупольных линз, корректирующих данные гармоники без возмущений бетатронной частоты;
- оценка эффективности коррекции.

Из рисунка мы видим, что коррекция шести гармоник эффективно (в 5–10 раз) подавляет среднеквадратичную модуляцию. Несколько иная картина с максимальным значением ИБФ, которое уменьшилось всего на 30%. Возможно, этот эффект связан с локальным характером возмущения. В дальнейшем мы предполагаем повторить численный эксперимент для случайного набора возмущений градиента в квадрупольных линзах кольца.

## 5. ДИСКУССИЯ

При хорошем качестве градиента в магнитных линзах выигрыш от применения предложенной процедуры вблизи рабочей точки может оказаться не слишком значительным. Однако в машинах с высокой интенсивностью (таких, как SIS100) действие пространственного заряда приводит к уменьшению бетатронной частоты, которая приближается к ближайшему полуцелому резонансу. Коррекция резонансной гармоники позволяет приближаться к резонансу или даже пересекать этот резонанс.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Росатома.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Veselov M. A., Zenkevich P. R.* Special Features of Gradient Correction in IТEP Proton Synchrotron // Proc. of the 5th HEAC, Frascati, 1965. P. 101.
2. *Courant E. D., Snyder H.* // Ann. Phys. (N. Y.) 1958. V. 3. P. 1.
3. FAIR Baseline Technical Report. GSI. Darmstadt, 2006.