

P11-2010-2

И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, В. Ч. Тхак

SLIPM — ПРОГРАММА НА ЯЗЫКЕ MAPLE
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНОЙ
ПРОБЛЕМЫ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОСНОВЕ
НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА.
I. АЛГОРИТМ

Доложено на международной конференции «Математическое моделирование и вычислительная физика», Дубна, 7–11 июля 2009 г.

Пузынин И. В., Пузынина Т. П., Тхак В. Ч.

P11-2010-2

SLIPM — программа на языке MAPLE для численного решения частичной проблемы Штурма–Лиувилля на основе непрерывного аналога метода Ньютона. I. Алгоритм

SLIPM (The Sturm–Liouville Problem in Maple) — программа на языке системы компьютерной алгебры MAPLE, предназначенная для численного решения с помощью непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) частичной проблемы Штурма–Лиувилля, т. е. для вычисления некоторого собственного значения линейного дифференциального оператора второго порядка и соответствующей собственной функции, удовлетворяющей однородным граничным условиям. SLIPM является развитием написанных на языке фортран программ SLIP1 и SLIPH4: она дополнена новой процедурой вычисления начального приближения к решению $\{\lambda^0, y^0\}$ и новыми способами вычисления начального значения итерационного параметра τ_0 .

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2010

Puzynin I. V., Puzynina T. P., Thach V. T.

P11-2010-2

SLIPM — a MAPLE Package for Numerical Solution of Sturm–Liouville Partial Problems Based on a Continuous Analog of Newton’s Method. I. Algorithm

We present the SLIPM (Sturm–Liouville Problem in MAPLE), a program in the language of system computer algebras MAPLE, intended for the numerical solution with the help of continuous analogue of Newton’s method (CANM) of Sturm–Liouville partial problems, i.e., for calculating some eigenvalue of linear second-order differential operator and corresponding eigenfunction satisfying homogeneous boundary conditions. SLIPM is development written in the Fortran language of programs SLIP1 and SLIPH4: it is added by a new procedure of calculation of initial approach to the solution $\{\lambda^0, y^0\}$ and new ways of calculating the initial value of iterative parameter τ_0 .

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2010

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для линейного дифференциального уравнения

$$\varphi^{(1)}(\lambda, y) \equiv y''(x) + 2p(x)y'(x) + (q(x) - \lambda r(x))y(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (1.1)$$

требуется вычислить собственное значение λ и соответствующее собственное решение $y(x)$, удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\varphi^{(2)}(\lambda, y) \equiv d_1(\lambda, a)y'(a) + f_1(\lambda, a)y(a) = 0, \quad (1.2)$$

$$\varphi^{(3)}(\lambda, y) \equiv d_2(\lambda, b)y'(b) + f_2(\lambda, b)y(b) = 0. \quad (1.3)$$

Для исключения тривиальных решений $y(x) \equiv 0$ вводится условие нормировки

$$\varphi^{(4)}(\lambda, y) \equiv \int_a^b y^2(x) dx = 1. \quad (1.4)$$

Здесь $p(x), q(x), r(x)$ — заданные функции, обеспечивающие существование нетривиальных собственных решений $y = y_n(x)$ граничной задачи (1.1)–(1.4), которым соответствуют собственные значения параметра $\lambda = \lambda_n$. Функции d_j, f_j непрерывно дифференцируемы по λ и $d_j^2 + f_j^2 > 0, j = 1, 2$.

Программа SLIPM по заданному начальному приближению $\{\lambda_n^0, y_n^0(x)\}$ вычисляет частичное решение $\{\lambda_n^*, y_n^*(x)\}$ задачи (1.1)–(1.4), где n фиксировано, $x \in \omega_h, \omega_h$ — равномерная разностная сетка на отрезке $a \leq x \leq b$ с шагом h . Алгоритмы численного решения задачи, взятые нами за основу, реализованы в SLIP1 и SLIPH4 [1] и хорошо зарекомендовали себя при решении многих сложных физических задач [2, 3].

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ (НАМН)

2.1. Алгоритм вычисления начального приближения. Алгоритм вычисления начального приближения основан на решении двух «встречных» задач Коши. Для первой задачи Коши ($x \geq a$) ставятся начальные условия в точке $x = a$, где условие (1.2) дополняется условием на производную, если $d_1 = 0$.

Аналогичное условие для второй задачи ($x \leq b$) ставится в точке $x = b$. Задача об отыскании собственных значений сводится тогда к отысканию корней функции

$$T(\lambda) \equiv y'_n(x_m)_{\text{лев}} y_n(x_m)_{\text{прав}} - y_n(x_m)_{\text{лев}} y'_n(x_m)_{\text{прав}} = 0, \quad (2.1)$$

появляющейся из условия равенства логарифмических производных для решений двух задач Коши в некоторой внутренней точке отрезка $x_m \in [a, b]$

$$\frac{y'_n(x_m)_{\text{лев}}}{y_n(x_m)_{\text{лев}}} = \frac{y'_n(x_m)_{\text{прав}}}{y_n(x_m)_{\text{прав}}}. \quad (2.2)$$

Если задачи Коши решать приближенно с помощью трехточечной разностной схемы точности $O(h^2)$, где h — шаг равномерной сетки ω_h , а функции $d_j(\lambda), f_j(\lambda)$ — полиномы степени $\sqrt{\lambda}$, что справедливо для широкого круга практических задач, то функция $T(\lambda)$ является полиномом. Его корни λ_n находятся по методу Ньютона с исключением уже найденных корней [4, 5] (k — номер итерации):

$$\lambda_n^{k+1} = \lambda_n^k - \frac{T(\lambda_n^k)}{T'_\lambda(\lambda_n^k) - T(\lambda_n^k) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n^k - \lambda_j}}. \quad (2.3)$$

Итерационный процесс (2.3) прекращается при одновременном выполнении двух условий:

$$|\lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k| \leq \varepsilon_T \quad \text{и} \quad |T(\lambda_n^{k+1})| \leq \varepsilon_T, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_T > 0$ — заданное малое число. После определения λ_n с заданной точностью мы одновременно получаем и приближенное значение соответствующей сеточной собственной функции $y_n(x_i)$. В SLIPM этот алгоритм реализован в процедуре NEWTON0.

2.2. Итерационные схемы на основе НАМН. Задача (1.1)–(1.4) является нелинейным функциональным уравнением

$$\varphi(z) = 0, \quad z = (\lambda, y(x)),$$

где φ — совокупность функций $\varphi^{(j)}, j = 1, 2, 3, 4$. Согласно НАМН [2, 3], задача (1.1)–(1.4) заменяется эволюционным уравнением

$$\varphi'(z(t))z'(t) = -\varphi(z(t)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.5)$$

с начальным условием

$$z(0) = z_0 = (\lambda_0, y_0(x)). \quad (2.6)$$

Здесь φ' — производная Фреше оператора φ , $z'(t) = (\mu(t), v(x, t))$, где

$$\mu(t) = \lambda'(t), v(x, t) = y'_t(x, t). \quad (2.7)$$

При достаточно общих предположениях на $\varphi(z)$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z^*\| = 0$, где $z^* = (\lambda^*, y^*(x))$ — решение задачи (1.1)–(1.4), ближайшее к z_0 . Для приближенного решения задачи (2.5), (2.6) методом Эйлера введем дискретное множество узлов $\{t_k\} = \{\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ и запишем приближенные выражения для соотношений (2.7):

$$\begin{cases} \left. \frac{dy(x, t)}{dt} \right|_{t=t_k} \approx v(t_k) = \frac{y(x, t_{k+1}) - y(x, t_k)}{\tau_k}, \\ \left. \frac{d\lambda(t)}{dt} \right|_{t=t_k} \approx \mu(t_k) = \frac{\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)}{\tau_k}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Введем обозначения

$$\lambda_k = \lambda(t_k), \quad y_k = y(x, t_k), \quad \mu_k = \mu(t_k), \quad v_k = v(x, t_k).$$

При дискретной аппроксимации по переменной x эволюционного уравнения (2.5) использовались трехточечные разностные и квадратурные формулы с точностью аппроксимации порядка $O(h^2)$ на равномерной сетке $\omega_h \in [a, b]$. Для вычисления λ_{k+1}, y_{k+1} при известных λ_k, y_k на каждом шаге итерации необходимо:

а) решить относительно w_k уравнение

$$\varphi^{(j)}(\lambda_k, y_k)w_k = -\varphi_\lambda^{(j)'} y_k, \quad j = 1, 2, 3; \quad (2.9)$$

б) вычислить значение μ_k из уравнения

$$\mu_k = \frac{1 + (y_k, y_k)}{2(y_k, w_k)}, \quad (2.10)$$

где $(\cdot, \cdot) = \int_a^b (\cdot, \cdot) dx$;

в) найти новые приближения λ_{k+1} и y_{k+1} , используя (2.8), т. е.

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_k \mu_k, \quad y_{k+1} = (1 - \tau_k)y_k + \tau_k \mu_k w_k, \quad (2.11)$$

где τ_k определяется специальными алгоритмами. Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\delta_k < \varepsilon, \quad (2.12)$$

где δ_k определяется по одной из формул:

$$\delta_k = \max_j \max_x |\varphi^{(j)}(\lambda_k, y_k(x))|, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

$$\delta_k = \left[\int_a^b \varphi^{(1)2}(\lambda_k, y_k(x)) dx \right], \quad (2.14)$$

$x \in \omega_h, \varepsilon > 0$ — заданное малое число.

2.3. Алгоритмы вычисления итерационного параметра τ_k . Вычисление итерационного параметра τ_k связано с изменением невязки δ_k в ходе итераций. Ниже приводятся следующие алгоритмы выбора τ_k , в которых τ_0 — некоторое заданное значение: $0 < \tau_0 \leq 1$.

$$1) \tau_k \equiv \tau_0. \quad (2.15)$$

Этот алгоритм при достаточно малом τ_0 обычно применяется при плохих начальных приближениях с целью проверить возможность сходимости от этих приближений. Сходимость при этом очень медленная. При $\tau_k \equiv 1$ получается классическая схема Ньютона.

$$2) \tau_k = \begin{cases} \min(1, 2\tau_{k-1}), & \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max(\tau_0, \tau_{k-1}/2), & \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1}, \end{cases} \quad (2.16)$$

где δ_k определяется по формуле (2.13). Этот алгоритм аналогичен широко распространенному способу выбора шага интегрирования в стандартных программах решения задачи Коши, вычисления интегралов.

Алгоритм рекомендуется применять при хороших начальных приближениях. Он обеспечивает быструю сходимость, однако не всегда устойчив.

$$3) \tau_k = \begin{cases} \min(1, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}), & \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max(\tau_0, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}), & \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1}, \end{cases} \quad (2.17)$$

где δ_k определяется по формуле (2.13). Этот алгоритм более устойчив и обеспечивает сходимость в достаточно широкой области начальных приближений, однако зависит от задания τ_0 .

$$4) \tau_k = \frac{\delta_{k-1}}{\delta_{k-1} + \delta_k(1)}, \quad (2.18)$$

где δ_k определяется по формуле (2.14), $\delta_k(1)$ — невязка на k -й итерации для $\tau_k = 1$. Это алгоритм оптимального выбора τ_k [6].

5) На равномерной сетке ω_τ на отрезке $[0, 1]$ с шагом Δ_τ вычисляется такое значение τ_k , которому соответствует минимальная невязка. Этот алгоритм более общий, чем в п. 4, хотя и требует большего объема вычислений.

Недостатком алгоритмов 1–3 является эмпирическое задание начального значения параметра τ_0 .

2.4. Алгоритмы вычисления значения параметра τ_0 . В представленной работе предложены и программно реализованы два новых алгоритма вычисления τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{\delta_0}{2\delta_1(1)}, \quad (2.19)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\delta_1(1)}{\delta_0} \right|, \quad (2.20)$$

где невязка δ_k определяется по формуле (2.13), $\delta_1(1)$ — невязка на первой итерации ($k = 1$) для $\tau = 1$. Ограничение: $0,1 \leq \tau_0 \leq 1$.

Их применение позволяет сократить число итераций при решении конкретных задач, что видно из сравнения результатов, представленных в следующем разделе в табл. 1 для уравнения Шредингера с потенциалом Морзе и табл. 2 при решении уравнения Лежандра.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Программа SLIPM проверена на ряде тестов [7]. Здесь приведены результаты ее применения для решения трех задач.

Пример 1. Уравнение Шредингера с потенциалом Морзе [1]. В этом примере задача (1.1)–(1.4) имеет коэффициенты уравнения $p(x) \equiv 0$, $r(x) \equiv 1$, $q(x) = -2MD(e^{-2a_1(x-x_0)} - 2e^{-a_1(x-x_0)})$ на интервале (a, b) и граничные условия $d_1 = d_2 = 1$, $f_1 = \sqrt{\lambda} - \sqrt{2MD}e^{a_1x_0}$, $f_2 = \sqrt{\lambda} - \sqrt{2MD}e^{-a_1(b-x_0)}$, где значения констант $a_1 = 0,67$, $x_0 = 2,15$, $M = 4,69$, $D = 0,1005$.

Аналитическое решение с безузловой волновой функцией (число узлов $n = 0$) имеет вид $\lambda = 2MD[1 - a_1/2\sqrt{2MD}]^2$, $y(x) = C\xi^\rho e^{-\frac{\xi}{2}}$, где $\xi = 2\delta e^{-a_1(x-x_0)}$, $\delta = \sqrt{2MD}/a_1$, $\rho = \sqrt{\lambda}/a_1$. Для указанного набора констант a_1, x_0, M, D аналитическое значение $\lambda_a = 0,4353114734$.

В первой части табл. 1 приведены вычисленные собственные функции $y_h(x)$ и собственные значения λ_h на последовательности $\Delta_h = (h, h/2, h/4)$ вдвое сгущающихся сеток при значениях $a = 0, b = 20, h = 0,008333$ ($N = 2401$), $\varepsilon = 0,0001$. Параметр τ_k определяется по формуле (2.17), невязка δ_k — по формуле (2.13).

Для начального приближения $y_0^{\text{Newt}}, \lambda_0^{\text{Newt}}$, полученного с помощью процедуры NEWTON0, невязка $\delta_0 < \varepsilon$ очень маленькая и выход из итерационного процесса происходит после 0 итераций.

Для проверки области сходимости метода и достоинств новых алгоритмов выбора τ_0 начальное приближение z_0 сделано плохим: $y_0 = (C_1 y_0^{\text{Newt}} + C_2; C_1 = 1, C_2 = 0,3); \lambda_0 = 1000,435$. В табл. 1 показано начальное значение невязки $\delta_0 \approx 60$, количество итераций k и значения δ_k после окончания итерационного процесса по условию (2.12). В последнем столбце первой части таблицы приводятся значения отношения Рунге для $z = z(t) = (\lambda(t), y(x, t))$:

$$\sigma = \frac{z_h - z_{h/2}}{z_{h/2} - z_{h/4}}. \quad (3.1)$$

Таблица 1.

x	$\lambda_h = 0.435312$ y_h	$\lambda_{h/2} = 0.435312$ $y_{h/2}$	$\lambda_{h/4} = 0.435312$ $y_{h/4}$	$\sigma_\lambda \simeq 4.$ $\sigma_y(3.1)$
0	.188079e-1	.188090e-1	.188092e-1	3.996
4	.461810	.461811	.461811	3.999
8	.492263e-1	.492265e-1	.492266e-1	4.0
12	.361378e-2	.361380e-2	.361380e-2	4.0
16	.258596e-3	.258597e-3	.258597e-3	4.001
20	.184721e-4	.184723e-4	.184723e-4	4.004
δ_0	60.097359	60.172738	62.171030	
δ_{13}	$\tau_0 = 0.1$ 1.23e-11	$k = 13$ 1.35e-11	1.37e-11	
δ_3	$\tau_0 = 1$ (2.19) 2.604e-8	$k = 3$ 1.551e-8	1.362e-8	
δ_5	$\tau_0 = 0.4499$ (2.20) 2.877e-13	$k = 5$ 2.671e-13	3.063e-13	

Величина выражения (3.1) должна быть порядка $O(2^p)$, где p — точность дискретной аппроксимации задачи (1.1)–(1.4). Видно, что точность полученного разностного решения задачи (1.1)–(1.4) имеет порядок $O(h^2)$.

Во второй части табл. 1 представлены результаты трех расчетов, отличающихся способом счета начального значения τ_0 : $\tau_0 = 0,1$ и по формулам (2.19), (2.20). Здесь k указывает количество итераций, потребовавшихся для вычисления требуемых решений с заданной точностью ε . Видно, что использование алгоритмов (2.19), (2.20) привело к сокращению числа итераций с 13 для $\tau_0 = 0,1$ до 3 и 5 соответственно. На рис. 1 показан ход итерационного процесса.

Пример 2. Уравнение Лежандра. В этом примере $p(x) \neq 0$. Задача (1.1)–(1.4) имеет вид

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{\lambda}{1-x^2}y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

граничные условия

$$\begin{aligned} y'(x) - \frac{\lambda}{2}y(x) &= 0, & x = -1; \\ y'(x) + \frac{\lambda}{2}y(x) &= 0, & x = +1. \end{aligned}$$

Точные собственные значения данной задачи определяются аналитически по формуле $\lambda_n = -n(n+1)$, а собственные функции могут быть найдены, например, по следующей аналитической формуле в системе MAPLE:

$$p_n := \text{LegendreP}[n, x]; \quad p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \dots$$

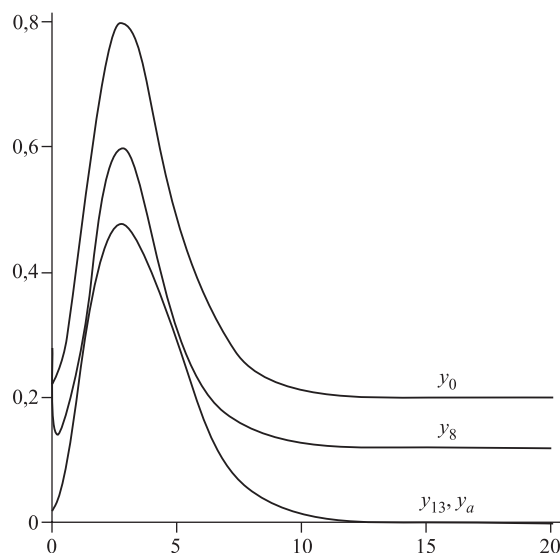


Рис. 1. Аналитика y_a , $\lambda_a = 0,4353114$; $k = 0$ — y_0 , $\lambda_0 = 1000,435$; $k = 8$ — y_8 , $\lambda_8 = 270,779$; $k = 13$ — y_{13} , $\lambda_{13} = 0,4353125$ (y_{13} и y_a совпадают); k — номер итерации, $\tau_0 = 0,1$, τ_k определяется по формуле (2.17)

Таблица 2.

x	$\lambda_h = -6.00$ y_h	$\lambda_{h/2} = -6.00$ $y_{h/2}$	$\lambda_{h/4} = -6.00$ $y_{h/4}$	$\lambda_a = -6.0$ $\sigma(3.1)$
-1.0	1.581136	1.581138	1.581138	4.0
-0.6	.632454e-1	.632455e-1	.632455e-1	4.0
-0.4	-.411095	-.411096	-.411096	4.001
0.0	-.790568	-.790569	-.790569	4.0
δ_0	39.847	79.521	158.869	
δ_{13}	$\tau_0 = 0,1$ 8.85e-11	$k = 13$ 1.78e-10	3.57e-10	
δ_4	$\tau_0 = 1$ (2.19) 2.63e-9	$k = 4$ 5.26e-9	1.05e-8	
δ_2	$\tau_0 = 0.45$ (2.20) 2.63e-9	$k = 4$ 9.01e-13	2.07e-11	

В первой части табл. 2 приведены результаты для $x \in (-1, 0)$ вычисления решения при $n = 2$, полученные на последовательности $\Delta_h = (h, h/2, h/4)$ вдвое сгущающихся сеток, $h = 0,0125$ ($N = 1601$), подтверждающие порядок $O(h^2)$ сходимости приближенного решения задачи (1.1)–(1.4). В качестве

начального приближения взято специально ухудшенное известное аналитическое или полученное с помощью процедуры NEWTON0 решение: $y_0 = (C_1 y_0^{\text{Newt}} + C_2; C_1 = 2, C_2 = 0,1); \lambda_0 = -5$. В табл.2 показано начальное значение невязки $\delta_0 \approx 40$, количество итераций k , значения δ_k после окончания итерационного процесса по условию (2.12), $\varepsilon = 0,0001$.

Во второй части табл.2 представлены результаты трех расчетов, отличающихся способом счета начального значения τ_0 : $\tau_0 = 0,1$ и по формулам (2.19), (2.20). Здесь k указывает количество итераций, потребовавшихся для вычисления требуемых решений с заданной точностью ε . Видно, что использование алгоритмов (2.19), (2.20) привело к сокращению числа итераций с 13 для $\tau_0 = 0,1$ до 4 для обоих новых алгоритмов. Значения параметра τ_k и невязки δ_k определяются по формулам (2.13) и (2.17).

На рис. 2 показан ход итерационного процесса.

Пример 3. Уравнение Шредингера

$$y''(x) + \left(\frac{2}{x} - \lambda\right)y(x) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad (3.2)$$

с краевыми условиями $y(0) = 0, y(\infty) = 0$. Использование процедуры SLIPM от начального приближения $\lambda_0 = 0,9$ на интервале $(0, 20)$ дает собственное значение $\lambda = 1$. Соответствующая волновая функция выдается в дискретном виде на сетке по x . Отметим, что использование процедуры dsolve в СКА Maple для решения этого уравнения дает общее решение в аналитическом

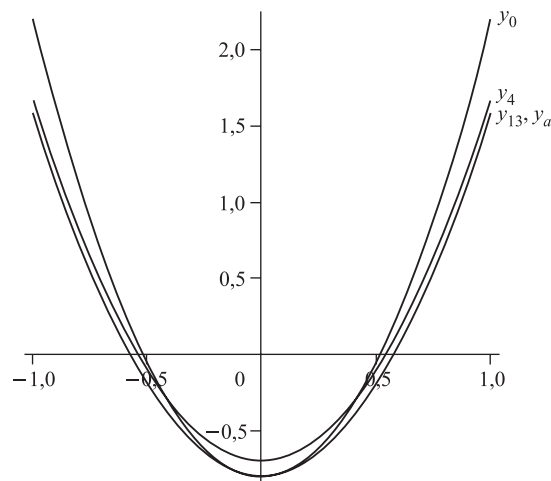


Рис. 2. Аналитика y_a , $\lambda_a = -6$; $k = 0$ — y_0 , $\lambda_0 = -5$; $k = 4$ — y_4 , $\lambda_4 = -5,381$; $k = 13$ — y_{13} , $\lambda_{13} = -6,0$ (y_{13} и y_a совпадают); k — номер итерации, $\tau_0 = 0,1$, τ_k определяется по формуле (2.17)

виде, зависящем от λ , через функции Уиттекера:

$$y(x) = C_1 \text{WhittakerM}\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}, 1/2, 2\lambda^{1/2}x\right) + C_2 \text{WhittakerW}\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}, 1/2, 2\lambda^{1/2}x\right). \quad (3.3)$$

Подстановка значения $\lambda = 1$ в `dsolve` дает аналитическое решение $y(x) = xe^{-x}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- На базе НАМН создана программа SLIPM на языке MAPLE, предназначенная для численного решения частичной проблемы Штурма–Лиувилля для линейного дифференциального оператора второго порядка с однородными граничными условиями.
- Предложены и программно реализованы два новых алгоритма вычисления начального значения итерационного параметра τ_0 . На приведенных примерах продемонстрировано сокращение количества итераций при их использовании.
- На ряде тестов продемонстрирована заданная точность порядка $O(h^2)$ итерационных ньютоновских схем (h — шаг дискретной сетки по x). Использование экстраполяции по Ричардсону для результатов на последовательности трех сгущающихся сеток позволяет повысить точность до порядка $O(h^4)$.
- Возможности графических пакетов СКА MAPLE позволяют организовать визуализацию итерационного процесса в SLIPM.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00770-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Puzynin I. V., Puzynina T. P.* SLIP1 — Program for the Numerical Solution of the Sturm–Liouville Problem Basing on the Continuous Analog of the Newton Method. Collection of Scientific Papers in Collaboration of JINR, Dubna, USSR, and Central Research Institute for Physics, Budapest, Hungary, KFKI-74-34, 1974. P. 93–112;
Puzynin I. V., Puzynina T. P., Strizh T. A. SLIPH4 — Program for Numerical Solution of the Sturm–Liouville Problem. JINR Report P11-87-332. Dubna, 1987;
<http://www.jinr.ru/programs/jinrlib/slip/index.html>

2. Пузынин И. В. и др. Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых квантово-полевых моделей // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 1. С. 210–265;
Puzynin I. V. et al. General Continuous Analog of Newton's Method for Numerical Research of Some Quantum-Field Models // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. 1999. V. 30, No. 1. P. 87–110.
3. Пузынин И. В. и др. О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических систем // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, вып. 1. С. 144–232;
Puzynin I. V. et al. Methods of Computational Physics for Investigation of Models of Complex Physical Systems // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. 2007. V. 38, No. 1. P. 70–116.
4. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М: Наука, 1970.
5. Акишин П. Г., Пузынин И. В. Реализация метода Ньютона в разностной задаче Штурма–Лиувилля. Сообщение ОИЯИ 5-10992. Дубна, 1977.
6. Ермаков В. В., Калиткин Н. Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // ЖВМиМФ. 1981. Т. 21. С. 491.
7. Bailey P. B., Everitt W. N., Zettl A. The SLEIGN2 Sturm–Liouville Code // ACM Trans. Math. Software. 2001. V. 21. P. 143–192.
8. Classroom Tips and Techniques Eigenvalue Problems for ODEs. Part 1–Part 3. Robert J. Lopez. Maplesoft.

Получено 18 января 2010 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 05.02.2010.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 310 экз. Заказ № 56882.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/