Р2-2010-152

А. А. Гусев, О. С. Космачев*

СТРУКТУРНО-КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

*E-mail: kos@theor.jinr.ru

Гусев А. А., Космачев О. С. P2-2010-152
Структурно-кинематический подход в физике элементарных частиц

Предложен единый подход для построения релятивистских волновых уравнений для лептонов. Он является кинематическим в силу того, что представляет собой точные результаты, основанные на немногих общепринятых фундаментальных принципах. Возникающие при этом структурные составляющие уравнений и частиц являются следствием дискретных симметрий или компонентов связности представлений группы Лоренца. Общность и строгость развитого метода позволяют ставить вопрос о его расширении на адронный сектор. Обсуждаются некоторые условия для решения названной проблемы, такие как унификация математического формализма и обобщения широко используемых понятий.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2010

Gusev A. A., Kosmachev O. S. P2-2010-152
Structural Kinematical Approach in Elementary Particle Physics

Unique approach is proposed for constructing of relativistic lepton wave equations. It is kinematical approach because it is exact results based on few conventional fundamental principles. Arising structural constituents of equations and particles are corollary of discrete symmetries or connected components of Lorentz group. Generality and accuracy of the developed method allow one to put the question of its extension on the hadron sector. The conditions for solving of the named problem are discussed such as unification of the mathematical formalism and some widely used notions.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2010

ВВЕДЕНИЕ

Значимость и универсальность структурных представлений, начиная с древнегреческой идеи атомизма, выросла со временем настолько, что напрашивается формулировка: все реально существующие физические объекты имеют структуру, и наличие своих собственных структур позволяет различать нетождественные объекты. В физике элементарных частиц весьма успешно и плодотворно эта идея воплотилась в концепции структурных квантовых чисел, получившей название гипотезы кварков [1, 2].

Вскоре после ее провозглашения появился ряд работ, отмечающих трудности сочетания гипотезы кварков и группы Пуанкаре. Они получили общее название «теоремы запрета» (no-go theorems) [3]. Наиболее сильное высказывание подобного типа принадлежит Райферти (O'Raifeartaigh) [4]. Существо вопроса сводится к тому, что объединение группы Пуанкаре и группы внутренних симметрий возможно только тривиальным образом, т. е. в виде прямого произведения. В таком случае все частицы, объединяемые внутренними симметриями в мультиплеты, должны иметь одинаковые массы. Последнее не соответствует действительности.

На проходившем в Дубне в 2000 г. XXIII Международном коллоквиуме по теоретико-групповым методам в физике состоялось вручение профессору Райферти Вигнеровской медали (Большой золотой медали Американского математического общества) за упомянутую работу. Тем самым была отмечена важность проблемы релятивистского описания кварков и отсутствие такого ее решения, которое не вызывало бы возражений и сомнений. С того времени положение не изменилось.

Содержание работ, изложенных в цикле статей [5–7], может быть охарактеризовано как развитие структурно-кинематических методов в релятивистской физике элементарных частиц. Кинематические результаты в данном случае означают точные результаты, вытекающие из достаточно общих фундаментальных принципов. Другой стороной этих же работ явился исчерпывающий анализ, благодаря которому удалось установить наличие подструктур изучаемых объектов. Исчерпывающий означает настолько полный, что не оставляет возможности для продолжения математического анализа и потому исключает наличие дополнительных характеристик типа квантовых чисел или других физических свойств.

Развитие физики за последние сто лет убеждает нас в том, что для описания микромира релятивизм не имеет альтернативы. Подобные высказывания сейчас представляются тривиальными, однако практическая, последовательная реализация данного требования далека от полноты и очень часто принимает форму эклектики, где релятивизм механически перемешивается с нерелятивизмом. Известные успехи нерелятивистской квантовой механики на том или ином шаге сталкиваются с «непонятным, выходящим за рамки» и т. п. Надежным в таких случаях остается только то, что связано с инвариантностью относительно преобразований группы трехмерных вращений, т. е. подгруппы группы Лоренца, законов сохранения энергии-импульса и полного момента. В релятивизме законы сохранения получили более полное выражение и привели к понятиям «дефект массы», спин-частицы, вывести которые в рамках нерелятивистской квантовой механики невозможно. Такая ориентация, конечно, не отрицает возможность качественного рассмотрения целого ряда вопросов, построения наглядных моделей на основе нерелятивистской квантовой механики и получения вполне добротных результатов, особенно когда речь идет о прикладных направлениях. Однако более глубокое понимание природы явлений, достижение единства в описании и охват большей совокупности явлений в рамках единого подхода невозможны без большей степени общности, как это имеет место в соотношении между релятивизмом и нерелятивизмом.

В наших построениях мы принимали во внимание также положения, которые не относятся к требованиям типа аксиом, но без соблюдения которых невозможно представить решение ряда теоретических вопросов. Сюда относится унификация математического формализма, необходимость учета структуры объекта и другие вопросы.

Два обстоятельства заставляют придерживаться идеи унификации математического формализма. Во-первых, развитие собственно физики микромира и, во-вторых, успехи смежных отраслей знания, которые вышли на атомный или субатомный уровень структуры материи. Результаты, представленные смежниками (темная материя и скрытая энергия, асимметрия вещества и антивещества в мире, возникновение закономерностей из хаоса и т. п.), не могут игнорироваться при дальнейшем развитии физики микромира. История научной мысли — это история синтеза понятий, казалось бы, разнохарактерных или далеко отстоящих друг от друга. Такова глубинная основа унификации. В самой физике микромира периодически возникают задачи, требующие целостного рассмотрения всей совокупности каких-либо частиц или их взаимодействий. Примерами тому могут служить семейства частиц, формируемые унитарными симметриями или K-мезонные и нейтринные осцилляции. Здесь проблема унификации принимает форму прямой производственной необходимости.

Мы понимаем, что отмеченные требования не охватывают и не исчерпывают всех проблем физики элементарных частиц. Они являются обязательными и первоочередными для задач определенного сорта. В стороне остаются пока вопросы устойчивости, теории динамических систем и т. п., без решения которых едва ли можно будет говорить о кинетике микромира (взаимодействий во внутриядерной среде) или о понимании процессов множественного рождения в нем. Однако их актуальность от этого не уменьшается.

Упомянутая обзорная статья [3] заканчивается вопросом: существуют ли перед теоремами запрета какие-либо альтернативные ситуации? Альтернативой, не вызывающей вопросов или возражений, могло бы быть такое положение, когда сами структурные составляющие по определению являются релятивистскими. Именно это имеет место в развиваемой нами модели для лептонного сектора. Здесь минимальными составляющими являются неприводимые представления группы Лоренца с первым весовым числом $l_0 = 1/2$, т. е. операторы, действующие в пространстве спиноров. Необходимые квантовые числа при этом возникают благодаря изменяющейся структуре и, в конечном итоге, требованиям быть наблюдаемой частицей со своей спецификой взаимодействий.

На этом пути возможна детализация структуры адронов на строго релятивистской основе. В значительной мере устраняется разрыв между лептонами и адронами, при котором лептоны не имеют никакой структуры, а адроны имеют структуру, но не релятивистскую. Такое расхождение между двумя секторами можно понимать так, что членение адронов на кварки является более крупным, а сами составляющие более сложными, чем требуется для описания лептонов. Это же обстоятельство может оказаться важным для лучшего понимания различий между сильными и слабыми взаимодействиями.

1. УНИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Придерживаясь названных общих моментов, мы получили ответ на вопрос о полном числе групп уравнений стабильных и нестабильных лептонов. Необходимые и достаточные условия их получения в данном случае оказались такими:

1) инвариантность и ковариантность уравнений относительно однородной группы Лоренца с учетом четырех компонентов связности;

2) формулировка уравнений на основе неприводимых представлений групп, определяющих каждое лептонное уравнение;

3) сохранение 4-вектора тока вероятности и положительно определенный четвертый компонент тока;

4) величина спина лептонов, предположительно равная $1/2$;

5) необходимость каждому лептонному уравнению редуцироваться к уравнению Клейна–Гордона.

Первым прямым результатом явилось нахождение алгоритма для построения стабильных лептонов. Он был фактически извлечен из уравнения Дирака с помощью исчерпывающего анализа группы γ-матриц Дирака. Анализ показал, что группа содержит три из четырех возможных компонентов связности группы Лоренца. Уравнение в целом оказалось достаточно информативным для обобщения алгоритма на весь набор лептонов.

Первый пункт необходимых и достаточных условий, связанный с требованием однородности группы Лоренца, приводит к тому, что все частицы, включая нестабильные, описываются как точечные так же, как электрон.

Все представленные уравнения получены без обращения к формализму Лагранжа. Поэтому может встать вопрос: каким образом и что является эквивалентом? Для начала отметим, что требование релятивизма присутствует как в нашем, так и в традиционном подходе, а вот методики получения явного вида уравнений принципиально различные. В нашем случае вместо вариационного метода получения волнового уравнения мы используем неприводимость представлений группы Лоренца с последующим расширением их до групп волновых уравнений. При этом оказалось, что с учетом всех пяти перечисленных пунктов и четырех компонентов связности появляется возможность перечислить все варианты, допустимые физическими и математическими требованиями. Всего их получилось пять для массивных лептонов и 18 для безмассовых. Далее выяснилось, что все эти варианты в конечном итоге сводятся к пяти и только к пяти неэквивалентным. Эквивалентные отличаются один от другого только различными выборами генераторов внутри группы. Среди 23 вариантов не нашлось ни одного «лишнего» или дополнительного сверх упомянутых пяти неэквивалентных типов уравнений для стабильных лептонов. Это можно понимать как своеобразную устойчивость процедуры вычисления при варьировании порядка генераторов. Изменение порядка генераторов (т. е. их порядка как элементов групп 2 или 4) приводит к тому, что уравнение переходит само в себя либо в другое из числа найденных. Массивные уравнения переходят в массивные, безмассовые — в безмассовые. Порядок генераторов 2 или 4 целиком определяется требованием — спин лептонов равняется $1/2$.

Известно, что все линейные волновые уравнения должны редуцироваться к уравнению Клейна–Гордона. Вообще говоря, оно не описывает ни один конкретный тип частиц и является своеобразной оболочкой, объемлющей все релятивистские волновые уравнения независимо от спина. Кроме того, если в нем положить $m = 0$, то оно останется справедливым. Такое свойство является результатом того, что оно не содержит информации о структуре частиц. Иное положение в случае уравнений первой степени по производным. Так, например, в уравнениях типа Дирака нельзя положить $m = 0$. Такой предельный переход требует структурной перестройки для того, чтобы новое выражение осталось волновым уравнением. В отличие от подхода Дирака мы не разлагаем уравнение Клейна-Гордона на произведение сомножителей первого порядка по производным, а сразу строим таковые, исходя из найденного алгоритма. По этой причине редукция к уравнению Клейна-Гордона в нашем случае является обязательным конструктивным требованием. В частности, оно позволяет установить в данном подходе, может ли масса частицы быть числом, отличным от нуля, или нет.

Группа Паули и собственное представление. Полезным и конструктивным оказалось сопоставление алгебры Ли группы Лоренца и группы спиновых матриц Паули. Оно позволило выйти на прямую интерпретацию операторов бустов для всех компонентов связности, нахождению их явного вида так же, как и явного вида самих алгебр Ли для трех компонентов связности помимо собственного представления. Результаты, относящиеся к несобственным компонентам связности, в физической литературе в явном виде были представлены нами впервые.

Будем исходить из общепринятого положения, принадлежащего Паули, о том, что спин является собственным моментом количества движения элементарной частицы, имеющим квантовую природу и не связанным с перемещением частицы как целого. При этом модуль спина считается постоянным числом. Это определение не изменилось в наше время. В случае электрона собственный момент количества движения, как известно, описывается формализмом спиновых матриц Паули [13]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что матрицы Паули порождают группу 16-го порядка [14]. Введем следующие обозначения:

$$\sigma_z\sigma_y \equiv a_1, \quad \sigma_x\sigma_z \equiv a_2, \quad \sigma_y\sigma_x \equiv a_3 \tag{1}$$

и

$$\sigma_x \equiv b_1, \quad \sigma_y \equiv b_2, \quad \sigma_z \equiv b_3. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$b_1 = a_1 c, \quad b_2 = a_2 c, \quad b_3 = a_3 c, \tag{3}$$

где $c = \sigma_x\sigma_y\sigma_z = iI$ есть один из четырех $(I, -I, iI, -iI)$ элементов центра группы. Здесь I — единичная 2×2 матрица. Это означает, что для данного неприводимого представления (НП) операторы a_1, a_2, a_3 связаны с операторами b_1, b_2, b_3 простыми соотношениями

$$b_1 = ia_1, \quad b_2 = ia_2, \quad b_3 = ia_3. \tag{4}$$

Можно отметить также, что

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1} = a_1^3, \quad a_1 a_2 \equiv a_3, \quad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2. \tag{5}$$

Это означает, что элементы a_1, a_2 порождают подгруппу кватернионов [5]. Обозначим ее так: $Q_2[a_1, a_2]$. Считая элементы всей группы образующими элементами алгебры, находим такие коммутаторы:

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\ [a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\ [a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\ [a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\ [a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. & \end{array} \tag{6}$$

С точностью до общего для всех равенств множителя 2 полученные коммутационные соотношения полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного преобразования Лоренца [15]. Далее группа, которая генерируется тремя σ-матрицами Паули, будет обозначаться как d_γ. Коммутационные соотношения (КС) (6) означают, что на группе d_γ реализуется собственное ортохронное неприводимое представление однородной группы Лоренца.

В силу построения коммутационных соотношений (6) все шесть операторов (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) имеют вполне определенный физический смысл [15]. Отсюда, в частности, следует, что $\sigma_x \equiv b_1, \sigma_y \equiv b_2, \sigma_z \equiv b_3$ являются инфинитезимальными операторами преобразований Лоренца вдоль соответствующих пространственных осей. При этом $\sigma_z\sigma_y \equiv a_1, \sigma_x\sigma_z \equiv a_2$, $\sigma_y\sigma_x \equiv a_3$ имеют смысл инфинитезимальных операторов подгруппы трехмерных вращений.

Формулы (6) допускают предельно сжатую, свернутую форму записи на основе антикоммутационных соотношений между генераторами группы d_γ

$$\{b_s, b_t\} = 2\delta_{st} \quad (s, t = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Из уравнения (7) следует, что три генератора $(b_s, s = 1, 2, 3)$ порождают группу (в данном случае d_γ), одно из двумерных представлений которой эквивалентно σ-матрицам Паули. Другими словами, уравнение (7) можно понимать как однозначное символьное обозначение всей совокупности равенств (6).

P-сопряженное представление. Последующее и более детальное изучение структуры группы Паули (d_γ) показало, что она обладает двойственностью. Это является следствием того, что помимо подгруппы $Q_2[a_1, a_2]$ она содержит еще одну подгруппу восьмого порядка — $q_2[a_1, a'_2]$. Определяющие соотношения между генераторами для обеих групп одинаковые. Различие только в порядках генераторов. Оба генератора в $Q_2[a_1, a_2]$ имеют порядок четыре. Один генератор (a_1) в $q_2[a_1, a'_2]$ имеет порядок четыре, а второй два. Коммутационные соотношения для $q_2[a_1, a'_2]$ (алгебра Ли) принимают вид

$$[a_1, a'_2] = 2a'_3, \quad [a'_2, a'_3] = -2a_1, \quad [a'_3, a_1] = 2a'_2, \tag{8}$$

где $a_1 = \sigma_z\sigma_y$, $a'_2 = a_2 c$, $a_3 = a_1 a'_2$, $c = \sigma_x\sigma_y\sigma_z = iI$.

Будем называть $q_2[a_1, a'_2]$ группой кватернионов второго рода. Повторяя построения Вигнера [16], нетрудно убедиться, что $Q_2[a_1, a_2]$ связана с $SU(2)$, когда $\det U = 1$, тогда как $q_2[a_1, a'_2]$ связана с $SU(2)$, когда $\det U = -1$.

Если расширить $q_2[a_1, a'_2]$ тем же самым элементом, как ранее $c = \sigma_x\sigma_y\sigma_z = iI$, мы получим следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\
[b'_1, b'_2] = -2a'_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = -2a'_2, \\
[a_1, b'_1] = 0, & [a'_2, b'_2] = 0, & [a'_3, b'_3] = 0, \\
[a_1, b'_2] = 2b'_3, & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\
[a'_2, b'_3] = -2b'_1, & [a'_2, b'_1] = -2b'_3, & \\
[a'_3, b'_1] = 2b'_2, & [a'_3, b'_2] = 2b'_1, &
\end{array} \tag{9}$$

где $b'_1 = a_1 c$, $b'_2 = a'_2 c$, $b'_3 = a'_3 c$.

Данные соотношения отличаются от таковых, написанных выше (6). Мы будем связывать их с группой f_γ, принимая во внимание, что f_γ и d_γ изоморфны. Они отличаются различным выбором трех генераторов.

Представление (9) будем называть P-сопряженным по отношению к d_γ в силу отмеченного выше различия в знаках детерминантов. Различия возникают на уровне подгруппы трехмерных вращений, т. е. в первой строке. Все последующие различия вытекают из изменений в первой строке.

Свернутая форма записи равенств (9) принимает вид

$$\begin{array}{ll}
\{b'_s, b'_t\} = -2\delta_{st} & (s, t = 1, 2, 3, s = t \neq 1), \\
\{b'_s, b'_t\} = 2\delta_{st} & (s = t = 1).
\end{array} \tag{10}$$

В отличие от равенств (7), здесь только один генератор из трех имеет порядок два, два других имеют порядок четыре.

T-сопряженное представление. Исчерпывающий анализ структуры группы γ-матриц уравнения Дирака [7] показал, что в ее составе имеется две и только две не изоморфных подгруппы 16-го порядка. Одной из них оказалась уже рассмотренная группа d_γ, другая подгруппа была обозначена b_γ.

Алгебра Ли для b_γ имеет вид

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b_1'', b_2''] = 2a_3, & [b_2'', b_3''] = 2a_1, & [b_3'', b_1''] = 2a_2, \\ [a_1, b_1''] = 0, & [a_2, b_2''] = 0, & [a_3, b_3''] = 0, \\ [a_1, b_2''] = 2b_3'', & [a_1, b_3''] = -2b_2'', & \\ [a_2, b_3''] = 2b_1'', & [a_2, b_1''] = -2b_3'', & \\ [a_3, b_1''] = 2b_2'', & [a_3, b_2''] = -2b_1''. & \end{array} \tag{11}$$

Соответствующая ей свернутая форма записывается так:

$$\{b_s'', b_t''\} = -2\delta_{st} \quad (s, t = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Из нее следует, что подгруппа b_γ порождается тремя антикоммутирующими генераторами четвертого порядка. Очевидно, что (6) переходит в (11) при замене

$$b_k \to b_k'' = ib_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{13}$$

При этом происходит переход одной группы в другую, $d_\gamma \to b_\gamma$. Детали получения уравнений (11) на основе группы Дирака приведены в [7]. Различие между КС (6) и (11) начинается с равенств во второй верхней строке. Используя известный гомоморфизм [8] между группой Лоренца и $SL(2, c)$, можно показать прямым вычислением, что коммутационные соотношения (11) совпадают с инфинитезимальными матрицами преобразований Лоренца, в которых произведено обращение времени $t \to -t$. Поэтому представление (11) было названо T-сопряженным по отношению к (6).

***PT*-сопряженное представление.** Подобно тому, как подгруппы d_γ и b_γ являются двумя подгруппами 16-го порядка группы уравнения Дирака, точно так же две и только две подгруппы 16-го порядка содержатся в уравнении Майораны [10]. В наших обозначениях это группа $D_\gamma(I)$. Ими оказались подгруппы d_γ и c_γ. Подгруппа c_γ представляет собой результат последовательного действия P- и T-сопряжений на группу d_γ. Эти операции коммутируют между собой. Коммутационные соотношения типа (6) для c_γ проще всего получить путем следующей замены в уравнениях (6):

$$a_2 \to a_2' = ia_2, \quad b_k \to b_k^* = ib_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{14}$$

В результате получается такой набор коммутационных соотношений:

$$
\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\
[b^*_1, b^*_2] = 2a'_3, & [b^*_2, b^*_3] = -2a_1, & [b^*_3, b^*_1] = 2a'_2, \\
[a_1, b^*_1] = 0, & [a'_2, b^*_2] = 0, & [a'_3, b^*_3] = 0, \\
[a_1, b^*_2] = 2b^*_3, & [a_1, b^*_3] = -2b^*_2, & \\
[a'_2, b^*_3] = -2b^*_1, & [a'_2, b^*_1] = -2b^*_3, & \\
[a'_3, b^*_1] = 2b^*_2, & [a'_3, b^*_2] = 2b^*_1. &
\end{array}
\tag{15}
$$

Подобно трем предыдущим группам (7), (10), (12) можно написать свернутую форму для c_γ:

$$
\begin{array}{ll}
\{b^*_s, b^*_t\} = 2\delta_{st} & (s, t = 1, 2, 3, s = t \neq 1), \\
\{b^*_s, b^*_t\} = -2\delta_{st} & (s = t = 1).
\end{array}
\tag{16}
$$

Свернутые формы являются в нашем случае одним из способов задания определяющих соотношений для соответствующей группы. Таким образом, видно, что любой компонент связности или каждая из четырех подгрупп (d_γ, b_γ, c_γ, f_γ) порождается тремя антикоммутирующими генераторами. Видно также, что они аналогичны записи группы уравнения Дирака [9]

$$
\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad \gamma^2_\mu = 1, \tag{17}
$$

отличаясь лишь числом генераторов и их порядками.Таким образом, сделан еще один шаг на пути унификации записи волновых уравнений и способа их получения. Так, например, сравнение выражений (7), (10), (12), (16) с (17) однозначно указывает на то, что формулировка волнового уравнения типа Дирака требует для начала наличия трех антикоммутирующих генераторов.

2. СТРУКТУРА ЛЕПТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе алгоритма, полученного путем всестороннего анализа уравнения Дирака, было установлено, что можно сформулировать пять видов уравнений (включая уравнение Дирака) для стабильных лептонов.

1. Уравнение Дирака — $D_\gamma(\mathrm{II})$:
структурный состав $d_\gamma, b_\gamma, f_\gamma$.
$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$.

2. Уравнение для дублета массивных нейтрино — $D_\gamma(\mathrm{I})$:
структурный состав $d_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$.
$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

3. Уравнение для квартета безмассовых нейтрино — $D_\gamma(\mathrm{III})$:

структурный состав $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$.

$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{III})] = 0$.

4. Уравнение для безмассового T-синглета — $D_\gamma(\mathrm{IV})$:

структурный состав b_γ.

$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{IV})] = -1$.

5. Уравнение для безмассового PT-синглета — $D_\gamma(\mathrm{V})$:

структурный состав c_γ.

$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{V})] = 1$.

Видно, что структура уравнений, а это наличие несовпадающих комбинаций из четырех компонентов связности однородной группы Лоренца, т. е. подгрупп $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$, позволяет отличить одно уравнение от другого. Все пять типов уравнений не имеют подструктур, допускающих физическую интерпретацию в качестве самостоятельно существующих объектов. По этой причине нет оснований считать их нестабильными так же, как это имеет место в случае электрона . Здесь $\mathrm{In}\,[D_\gamma(..)]$ представляет собой численную характеристику НП конечной матричной группы, принимающую одно из трех значений ± 1 или 0 [7, 8]. Далее $\mathrm{In}\,[D_\gamma(..)]$ будет называться структурным инвариантом группы $D_\gamma(..)$. Перебор всех возможностей на основе этих структурных инвариантов для четырех компонентов связности и для возможных инвариантов уравнений в целом позволяет утверждать, что других стабильных лептонов в рамках оговоренных предположений и требований не имеется.

Каждому из пяти уравнений соответствует своя собственная группа, структура которой однозначно фиксируется определяющими соотношениями между четырьмя генераторами. Три из них должны антикоммутировать, а четвертый может либо антикоммутировать, либо коммутировать с тремя другими. В первом случае мы получаем два уравнения для массивных лептонов — уравнение Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) и Майораны ($D_\gamma(\mathrm{I})$). Во втором — три уравнения для безмассовых нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{III})$), ($D_\gamma(\mathrm{IV})$), ($D_\gamma(\mathrm{V})$).

Как известно, определяющие соотношения для группы уравнения Дирака выражаются равенством (17). Определяющие соотношения для остальных групп в форме антикоммутаторов и коммутаторов получены в статье [7]. Они имеют следующий вид:

для $D_\gamma(\mathrm{I})$

$$\begin{aligned}
&\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \qquad \gamma_{s,t}^2 = 1 \qquad (s,t = 1,2,3),\\
&\gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0 \qquad (s = 1,2,3),\\
&\gamma_4^2 = -1;
\end{aligned} \tag{18}$$

для $D_\gamma(\mathrm{III})$:

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \qquad \gamma_s^2 = 1 \qquad (s,t = 1,2,3).\\ &\gamma_s\gamma_4 - \gamma_4\gamma_s = 0 \qquad (s, = 1,2,3),\\ &\gamma_4^2 = 1; \end{aligned} \tag{19}$$

для $D_\gamma(\mathrm{IV})$:

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = -2\delta_{st}, \qquad (s,t = 1,2,3)\\ &\gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \qquad \gamma_4^2 = 1; \end{aligned} \tag{20}$$

для $D_\gamma(\mathrm{V})$:

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 0, \qquad s \neq t, \qquad (s,t = 1,2,3)\\ &\gamma_3^2 = \gamma_2^2 = 1, \qquad \gamma_1^2 = -1,\\ &\gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \qquad \gamma_4^2 = 1 \end{aligned} \tag{21}$$

Все пять групп имеют порядок 32.

Необходимо отметить соответствие перечисленных групп лептонных уравнений и хорошо известных, предложенных ранее. Как уже отмечалось, группа $D_\gamma(\mathrm{II})$ прямо и однозначно связана с уравнением Дирака. Второе уравнение $D_\gamma(\mathrm{I})$ было предложено Майораной [10]. Уравнение, связанное с группой $D_\gamma(\mathrm{III})$, эквивалентное уравнению для безмассовых лептонов, нарушающих пространственную четность, было предложено Паули [11]. Наконец, с группами $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ можно связывать безмассовые истинно нейтральные лептоны [12]. Поэтому результаты, связанные с уравнениями для стабильных лептонов, в основном, сводятся к обнаружению их структуры и унификации записи составляющих и уравнений в целом.

Наличие различных компонентов связности в составе уравнений позволяет с новой точки зрения понять возможность описания частицы и античастицы в рамках одного уравнения. Если в структуре уравнения имеются T-сопряженные компоненты связности, то оно описывает как частицу, так и античастицу. Если указанных подструктур не имеется, то уравнение может описывать истинно нейтральную частицу. Такое понимание соотношения частица–античастица позволяет обобщить определение «античастица» на любые структурные составляющие, выражаемые через компоненты связности, включая такие, которые не могут быть наблюдаемыми частицами. Дело в том, что все четыре компонента связности и любая их комбинация могут быть выражены друг через друга с помощью соотношения типа (14) и для каждого из них имеется T-сопряженный компонент.

Из сказанного выше вытекает, что алгоритм построения стабильных лептонов в рамках однородной группы Лоренца исчерпан. Далее было установлено, что при тех же условиях возможно обобщение алгоритма такое, что форма уравнений остается прежней, но структура уравнений заметно усложняется. Достигается поставленная задача введением дополнительного (пятого) генератора для порождения новых групп волновых уравнений. Выяснилось, что в таком случае существует три и только три возможности, которые допускают интерпретацию как новые волновые уравнения со своими дополнительными характеристиками и спинами, равными $1/2$. При этом в новых группах появляются подструктуры, допускающие физическую интерпретацию в терминах стабильных лептонов, т. е. перечисленных выше пяти типов уравнений. В этом их отличие от групп стабильных лептонов, которое позволяет интерпретировать их как нестабильные, если масса частицы окажется больше суммы масс продуктов распада. Пятые генераторы ведут к дополнительным индексам для спецификации новых состояний или к появлению новых квантовых чисел согласно определению Вейля [17].

Так, расширение группы γ-матриц Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) с помощью одного антикоммутирующего генератора Γ_5 такого, что $\Gamma_5^2 = I$, приводит к группе Δ_1 со структурным инвариантом $\mathrm{In}\,[\Delta_1] = -1$. Расширение той же группы с помощью генератора такого, что ${\Gamma'_5}^2 = -I$ доставляет Δ_3 со структурным инвариантом $\mathrm{In}\,[\Delta_3] = 0$. Наконец, расширение группы γ-матриц дублетного нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{I})$) с помощью ${\Gamma''_5}^2 = -I$ приводит к группе Δ_2 с инвариантом $\mathrm{In}\,[\Delta_2] = I$. Здесь везде I — матрица 4×4.

Структура новых групп естественно и однозначно выражается в терминах групп стабильных лептонов.

Группа Δ_1 имеет следующие определяющие соотношения:

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{22}$$

Из них вытекает такой структурный состав:

$$\Delta_1\{D_\gamma(\mathrm{II}), \quad D_\gamma(\mathrm{III}), \quad D_\gamma(\mathrm{IV})\}. \tag{23}$$

Группа Δ_3 получается при расширении группы Дирака с помощью похожих определяющих соотношений. Отличие лишь в порядке пятого генератора Γ_5:

$$\begin{aligned} &\Gamma_s \Gamma_t + \Gamma_t \Gamma_s = 2\delta_{st} && (s, t = 1, 2, 3, 4), \\ &\Gamma_s \Gamma_5 + \Gamma_5 \Gamma_s = 0 && (s = 1, 2, 3, 4), \\ &\Gamma_5^2 = -1. \end{aligned} \tag{24}$$

Как следствие, получается другой структурный состав:

$$\Delta_3\{D_\gamma(\mathrm{II}), \quad D_\gamma(\mathrm{I}), \quad D_\gamma(\mathrm{III})\}. \tag{25}$$

Группа Δ_2 определена с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
&\Gamma_s\Gamma_t + \Gamma_t\Gamma_s = 2\delta_{st} && (s,t=1,2,3),\\
&\Gamma_s\Gamma_4 + \Gamma_4\Gamma_s = 0 && (s=1,2,3),\\
&\Gamma_4^2 = -1, && \\
&\Gamma_u\Gamma_5 + \Gamma_5\Gamma_u = 0 && (u=1,2,3,4),\\
&\Gamma_5^2 = -1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Состав группы отличается от двух предыдущих:

$$\Delta_2\{D_\gamma(\mathrm{I}),\quad D_\gamma(\mathrm{III}),\quad D_\gamma(\mathrm{V})\}. \tag{27}$$

Так же, как в случае стабильных лептонов, каждое уравнение оказалось наделено своей собственной структурой. Также можно отметить устойчивость — расширение стабильных подгрупп с помощью пятого антикоммутирующего генератора ведет только к этим трем группам. Однозначность каждого из структурных составов групп 64-го порядка $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ означает, что в каждой из групп имеется только три подгруппы 32-го порядка из пяти ранее перечисленных типов.

На основе изложенного можно отметить главные моменты алгоритма построения уравнений типа Дирака (т. е. для стабильных лептонов). Для записи их необходимо иметь четыре генератора для порождения группы так же, как это имеет место в уравнении Дирака. Все четыре должны иметь порядок два или четыре. Только в таком случае можно получить спин, равный $1/2$.

Если все четыре генератора антикоммутируют между собой, то в зависимости от порядка генераторов (два или четыре) и их всевозможных комбинаций мы получаем пять вариантов. Все они эквивалентны двум и только двум: это либо уравнение Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) [9], либо уравнение для массивного нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{I})$) [10]. Как уже отмечалось, первые три антикоммутирующих генератора порождают один из четырех компонентов связности. Выбор того или иного конкретного компонента из них для записи явного вида уравнения («фасад» уравнения) диктуется удобством перехода от одного представления, когда, например, демонстрируется ковариантность формулировки уравнения, к другому, связанному с проверкой необходимых свойств 4-вектора тока вероятности.

Фактически, совокупность указанных требований совместно с требованием редукции к уравнению Клейна–Гордона равносильны условию быть частицей, наблюдаемой в квантово-механическом смысле и в то же время релятивистской.

В тех случаях, когда четвертый генератор коммутирует с тремя другими, мы получаем три и только три группы уравнений для безмассовых нейтрино.

Все три получаются путем расширения трех групп $(d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma)$, не изоморфных друг другу, до группы лептонного уравнения. Напомним, что группа f_γ изоморфна d_γ и является P-сопряженным компонентом по отношению к d_γ. Итак, расширение d_γ ведет к квартетному состоянию $D_\gamma(\mathrm{III})$. Расширение b_γ доставляет T-синглетное состояние $D_\gamma(\mathrm{IV})$. В результате расширения c_γ мы получаем $D_\gamma(\mathrm{V})$.

Квартетные состояния характеризуются наличием двух пар компонентов связности, которые T-сопряжены между собой. T-сопряженные пары имеют одинаковые спиновые свойства. Таковыми являются d_γ и b_γ, а также f_γ и c_γ. Так, в случае пары d_γ и b_γ возможна ориентация спина вдоль любой пространственной оси координат. В случае пары f_γ и c_γ ориентация спинов возможна только по импульсу или против него. Синглетные сосотояния $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ характеризуются тем, что они не инвариантны относительно любого дискретного преобразования. По этой причине они не имеют античастиц. В случае T-синглетных состояний спины могут быть ориентированы вдоль любой из трех пространственных осей, в случае P-синглетов — только вдоль или против импульса.

Расширения групп стабильных лептонов с помощью пятого антикоммутирующего генератора ведет к формированию групп нестабильных лептонов. Две их них (Δ_1, Δ_3) можно связывать с заряженными лептонами. Третью (Δ_2) в силу того, что $\mathrm{In}\,[\Delta_2] = I$ (в полной аналогии с $D_\gamma(\mathrm{I})$) можно связывать с нейтральным, массивным, но уже нестабильным лептоном. Структура всех трех групп такова, что каждая из них имеет по два неэквивалентных неприводимых представления четвертого порядка. Напомним, что в уравнении Дирака и Майораны имеется по одному неэквивалентному представлению четвертого порядка. Именно с ними связаны γ-матрицы 4×4.

В остальном правила формирования волновых уравнений для нестабильных лептонов совпадают с таковыми для стабильных лептонов, включая размерность Г-матриц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение Клейна–Гордона–Фока является наиболее общей формулировкой релятивистского волнового уравнения с производными второго порядка. Его расщепление на произведение двух сомножителей, линейных по первым производным, привело к эпохальному с точки зрения физики научному открытию. Одним из его впечатляющих проявлений стало предсказание позитрона и последующее развитие концепции антивещества. В результате возникло более глубокое описание структуры микрочастиц и процессов, происходящих с ними.

Цикл наших работ представляет собой дальнейшую детализацию структурных построений, связанных с лептонным сектором, на основе методов

Дирака. Следствием единого подхода и унификации математического формализма, достигнутых при этом, стало расширение круга поставленных вопросов и ответов на них. Так, оказалось возможным получить ответ на вопрос о полном числе лептонных уравнений в рамках исходных предположений. Процедура вычисления каждого из уравнений оказалась устойчивой в том смысле, что вариации порядков генераторов групп ведут только к группам лептонных уравнений. При этом вся совокупность лептонных уравнений носит замкнутый и целостный характер. Это означает, что в рамках установленного алгоритма невозможно получить уравнения сверх перечисленных и в каждом случае конструктивными составляющими являются компоненты связности группы Лоренца. Ранее подобные вопросы не вставали.

Как следствие, полезное для дальнейших приложений, можно отметить такой факт. Во всех рассмотренных случаях структура лептонов, а значит их собственные или внутренние свойства, представляют собой своеобразную конверсию пространственно-временных симметрий как непрерывных, так и дискретных. Дальнейшее многообразие свойств может расти за счет различия внутренних структур и за счет вытекающих отсюда различий взаимодействий между ними. Все примеры в данном случае носят частный характер, однако методы получения выводов являются весьма общими и универсальными для всего круга лептонов. Поэтому не исключено, что примеры подобного типа будут множиться даже в случае более сложных образований типа составляющих адронов.

Одним из результатов выполненных исследований явилось обнаружение структуры лептонов, которая на данном этапе выглядит как формально-математическое свойство волновых уравнений. Эти структуры присутствовали в том же уравнении Дирака с момента его написания, но отнюдь не привнесены каким-либо дополнительными соображениями, хотя они стали известны сравнительно недавно. Что касается их пользы и необходимости, то они связаны с текущими задачами лептонного сектора и теми, которые выходят за его границы. Таковыми являются вопросы происхождения квантовых чисел лептонов и адронов.

Все предшествующие теоретические схемы, пытавшиеся установить связь между лептонами и адронами, отказывали лептонам в какой-либо структуре. В частности, лептонный сектор полностью выпал из структурных возможностей кварковой феноменологии. Полученные нами результаты создают предпосылки для распространения метода, развитого для описания лептонов, на адронный сектор на строго релятивистской основе и в едином подходе. Принципиальных запретов или ограничений для продвижения к данной цели не имеется.

На полученные результаты можно взглянуть с другой стороны и представить их как аналог аксиоматики, т. е. сферы теоретической деятельности, которая исходит из необходимости ограничиться четко зафиксированным набором исходных принципов, и строить на их основе теорию. Необходимость и актуальность таких построений будет возрастать по мере роста сложности наблюдаемых явлений, перегруженности теории предположениями, направленными на совпадение с экспериментальными точками в рамках какой-либо узкой задачи, все большей зависимости постановки и интерпретации эксперимента от теории и влияния других факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gell-Mann M.* // Phys. Lett. 1964. V. 8. P. 214.
2. *Zweig G.* CERN Preprint No. 401, 1964. P. 412.
3. *Pais A.* Dynamical Symmetries in Elementary Particle Physics // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 215–256.
4. *O'Raifeartaigh.* Lorentz Invariance and Internal Symmetry // Phys. Rev. 1964. V. 139. P. B1052–B1062.
5. *Космачев О. С.* Представления группы Лоренца и классификация стабильных лептонов. Препринт ОИЯИ Р2-2006-6. Дубна, 2006.
6. *Гусев А. А., Космачев О. С.* Структурные квантовые числа и нестабильные лептоны // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 2. С. 126–133.
7. *Космачев О. С.* Проблема квантовых чисел лептонного сектора // Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 2. С. 149–174.
8. *Lomont J. S.* Applications of Finite Groups. Academic Press, New York, London: 1959, P. 51, P. 320.
9. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
10. *Majorana E.* Teoria Simmetrica dell' Ellettrone e del Positrone // Il Nuovo Cimento. 1937. V. 14. P. 171.
11. *Паули В.* Общие принципы волновой механики. М.: ГТТЛ, 1947. С. 254.
12. *Космачев О. С., Гусев А. А.* О возможных типах майорановских частиц // Вестник РУДН, серия Математика. Информатика. Физика. 2008. № 2. С. 91–99.
13. *Pauli W.* Zur Quantenmechanik des magnetischen Electrons // Zs f. Phys. B. 1927. V. 43. S. 601.
14. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* Angular Momentum in Quantum Physics. V. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
15. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: ФМ, 1958. С. 166.
16. *Вигнер Е.* Теория групп. М.: ИЛ, 1961. С. 191.
17. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986. С. 16.

Получено 28 декабря 2010 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 16.03.2011.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,19. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 415 экз. Заказ № 57270.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/