

P5-2020-1

Н. Д. Дикусар *

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗ
НА ТРЕХТОЧЕЧНЫХ СЕТКАХ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

* E-mail: dnd@jinr.ru

Полиномиальный прогноз на трехточечных сетках

В рамках недавно предложенного метода базисных элементов (МБЭ) сделан новый подход к решению задачи полиномиального прогноза и экстраполяции шестого порядка для гладких функций. Прогноз на один шаг вперед определяется с помощью двух многочленов пятой степени. Формулы для коэффициентов МБЭ-многочленов зависят от шага сетки, значений функции и ее первой производной в узлах двух трехточечных сеток. Метод проверен численным решением задачи Коши для ОДУ. Эффективность численного интегрирования обеспечивается трехкратным вычислением правой части уравнения и порядком точности $O(h^5)$. МБЭ-прогноз может служить основой для разработки и создания эффективных алгоритмов численного решения задач Коши для ОДУ, включая жесткие.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

A Three-Point Grid Based Polynomial Prediction

Within the framework of the recently proposed basic element method (BEM), a new approach is made to the solution of the problem of polynomial prediction and extrapolation of the sixth order for smooth functions. The one step forward forecast is performed using two fifth degree polynomials. The formulae for the coefficients of BEM-polynomials depend on the grid step, the values of the function and its first derivative at the nodes of two three-point grids. The method was tested on the numerical solution of the Cauchy problem for ODE. The efficiency of numerical integration is ensured by a threefold calculation of the right side of the equation and the $O(h^5)$ accuracy of the solution. The BEM-prediction can serve as the core for the development and creation of effective algorithms for numerically solving Cauchy problems for ODEs, including stiff ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

*Заглядывать слишком далеко
вперед — недальновидно.
У. Черчилль*

ВВЕДЕНИЕ

Повышение эффективности методов полиномиальной аппроксимации и экстраполяции является актуальной проблемой в области численного решения многих практических задач и в научных исследованиях. Например, результативность численного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений со сложными правыми частями существенно зависит от эффективности методов экстраполяции.

Методы *локальной экстраполяции* Ричардсона для численного интегрирования жестких систем со сложными правыми частями характеризуются большой вычислительной сложностью [1–3], а современные программы метода Рунге–Кутты не способны эффективно решать жесткие задачи [4], которые все чаще встречаются на практике. Более точные методы с шестикратным вычислением правой части также увеличивают вычислительную сложность. Поэтому исследования методов Рунге–Кутты по-прежнему активно продолжаются [4].

В данной работе в рамках недавно предложенного метода базисных элементов (МБЭ) [5–9] разработан *метод полиномиального прогноза и экстраполяции* шестого порядка. Прогноз выполняется с помощью многочленов, определенных на *трехточечной сетке*, — МБЭ-многочленов. Узлы трехточечной сетки связаны с независимой переменной специальным правилом *двойного отношения* четырех точек [5].

Прогноз точки \hat{f}_* на кривой $f \in C$ на шаг вперед определяется с помощью двух МБЭ-многочленов пятой степени, заданных на двух равномерных трехточечных сетках с одним общим узлом и шагами h и \hat{h} , $0 < \hat{h} < h$.

В численных расчетах МБЭ-многочлены обеспечивают необходимую устойчивость и точность при меньшем объеме вычислений за счет *параметризации* базисных функций, *управления качеством* регрессионной матрицы, *понижения порядка* производных и др. [5–7].

Работа структурирована следующим образом: в первом разделе дается краткое описание конструкции МБЭ-многочлена. Во втором разделе предложен метод прогноза на равномерных трехточечных сетках. Эффективность МБЭ-прогноза подтверждается в третьем разделе примерами численного интегрирования задачи Коши. *Устойчивость* метода прогноза относительно размера длин h , \hat{h} и контроль погрешности расчетов иллюстрируются примерами в четвертом и пятом разделах.

1. О КОНСТРУКЦИИ МБЭ-МНОГОЧЛЕНА

В общем случае МБЭ-многочлен зависит от двух непрерывных параметров α и β — алгебраических расстояний до внутреннего узла *трехточечной сетки* $\Delta_3^{\alpha\beta}$: $x_\alpha = x_0 + \alpha < x_0 < x_0 + \beta = x_\beta$, $\alpha\beta < 0$, $|\alpha| \neq |\beta|$. Узлы сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$ и независимая переменная x функционально связаны специальным *правилем двойного отношения* четырех точек $\{x, x_\alpha, x_0, x_\beta\}$ [5], которое порождает три дробно-рациональные функции относительно α , β , τ или квадратичные параболы относительно переменной $\tau = x - x_0$:

$$w_1 = -\frac{\tau(\tau - \beta)}{\alpha\gamma}, \quad w_2 = \frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}, \quad w_3 = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta},$$

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 1, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0, \quad \gamma = \beta - \alpha.$$

Четвертая функция определяется в виде зануляющей кубической параболы

$$Q(\tau; \alpha, \beta) = \alpha\beta\tau w_3 = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta).$$

Определение 1. Функции w_1 , w_2 , w_3 и Q называются *базисными элементами*. МБЭ-многочлен степени n в форме базисных элементов принимает вид

$$p_{n \downarrow m}(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_j) = \sum_{j=0 \dots m} Q^j \mathbf{w}^T \mathbf{r}_j, \quad m = \lfloor n/3 \rfloor, \quad (1)$$

где $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$, $\mathbf{r}_j = [r_{\alpha j}, r_{\beta j}, r_{0j}]^T$ — коэффициенты, $\alpha = x_\alpha - x_0$, $\beta = x_\beta - x_0$ [5].

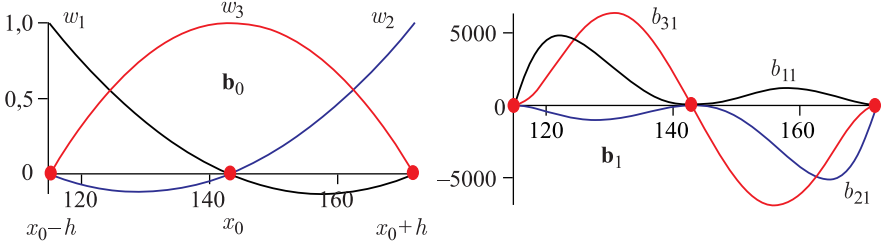


Рис. 1.

На равномерной сетке Δ_3^h : $x_0 - h < x_0 < x_0 + h$ базисные элементы зависят от τ и h :

$$\begin{aligned} w_1 &= \tau(\tau - h)/(2h^2), & w_2 &= \tau(\tau + h)/(2h^2), \\ w_3 &= (h^2 - \tau^2)/h^2, & Q &= \tau(\tau^2 - h^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Базисные функции полиномиальной модели $f \approx \mathbf{b}_0^T \mathbf{r}_0 + \mathbf{b}_1^T \mathbf{r}_1$, $f \in C$, являются компонентами векторов $\mathbf{b}_0 = \mathbf{w}$ и $\mathbf{b}_1 = Q\mathbf{w}$ (рис. 1), где

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \left[\frac{\tau(\tau - h)}{2h^2}, \frac{\tau(\tau + h)}{2h^2}, \frac{h^2 - \tau^2}{h^2} \right]^T, \\ \mathbf{b}_1 &= \left[\frac{\tau^2(\tau + h)(\tau - h)^2}{2h^2}, \frac{\tau^2(\tau + h)^2(\tau - h)}{2h^2}, -\frac{\tau(\tau + h)^2(\tau - h)^2}{h^2} \right]^T. \end{aligned}$$

Компоненты вектора $\mathbf{r}_0 = [f_{-h}, f_h, f_0]^T$ равны значениям функции в узлах сетки Δ_3^h , а компоненты вектора \mathbf{r}_1 вычисляются по первой производной в узлах Δ_3^h плюс добавки, зависящие от h и компонент \mathbf{r}_0 :

$$\mathbf{r}_1 = [-f'_{-h} + \mathbf{v}_{-h}^T \mathbf{r}_0/4h^5, \quad f'_h - \mathbf{v}_h^T \mathbf{r}_0/4h^5, \quad f'_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{r}_0/2h^5]^T,$$

где $\mathbf{v}_{-h} = [2h^2, h^2, -4h^2]^T$, $\mathbf{v}_h = [h^2, -3h^2, -4h^2]^T$ и $\mathbf{v}_0 = [-h^2, h^2, 0]^T$.

Подставляя формулы (2), $\tau = x - x_0$ и компоненты векторов \mathbf{r}_j , $j = 0, 1$, в (1) и собирая подобные при $(x - x_0)^i$, получим МБЭ-модель в форме разложения функции f по степеням $(x - x_0)$ на сетке Δ_3^h [7]

$$f(x) \approx \sum_{i=0 \dots 5} d_i (x - x_0)^i, \quad (3)$$

где коэффициенты $d_i(h, f_*, f'_*)$ определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= f_0, d_1 = f'_0, \\ d_2 &= [(f_{-h} - 2f_0 + f_h) + (f'_{-h} - f'_0)h/4]/h^2, \\ d_3 &= [5(f_h - f_{-h})/4 - (f'_{-h} + 8f'_0 + f'_h)h/4]/h^3, \\ d_4 &= [(-f_{-h} + 2f_0 - f_h)/2 - (f'_{-h} - f'_0)h/4]/h^4, \\ d_5 &= [3(f_{-h} - f_h)/4 + (f'_{-h} + 4f'_0 + f'_h)h/4]/h^5 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

С помощью векторов $\mathbf{y} = [f_{-h}, f_0, f_h, f'_{-h}, f'_0, f'_h]^T$ и \mathbf{c}_i , $i = \overline{0, 5}$, с компонентами, равными коэффициентам при значениях f_* и f'_* в (4),

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= [0, 1, 0, 0, 0, 0]^T, & \mathbf{c}_3 &= [5/4, 0, -5/4, -h/4, -2h, -h]^T, \\ \mathbf{c}_1 &= [0, 0, 0, 0, 1, 0]^T, & \mathbf{c}_4 &= [-1/2, 1, -1/2, -h/4, 0, h/4]^T, \\ \mathbf{c}_2 &= [1, -2, 1, h/4, 0, -h/4]^T, & \mathbf{c}_5 &= [3/4, 0, -3/4, h/4, h, h/4]^T \end{aligned}$$

коэффициенты d_i можно представить также в векторной форме:

$$d_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{y} h^{-i}, \quad i = \overline{0, 5}. \quad (5)$$

После подстановки (5) в (3) МБЭ-модель шестого порядка принимает вид

$$f(x) \approx A(x, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=0 \dots 5} \mathbf{c}_i^T \mathbf{y} h^{-i} (x - x_0)^i. \quad (6)$$

2. МБЭ-ПРОГНОЗ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ Δ_3^h

Схема МБЭ-прогноза использует формулы (4)–(6) на трехточечных сетках $\Delta_{n-2}^n: x_{n-2} = x_{n-1} - h < x_{n-1} < x_{n-1} + h = x_n$ и $\Delta_l^m: x_l = x_n - \hat{h} < x_n < x_n + \hat{h} = x_m$, $0 < \hat{h} < h$, $\Delta_l^m \subset \Delta_{n-1}^{n+1}$, $\Delta_{n-1}^{n+1}: x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$, $n = 3, 4, \dots$, $\Delta_{n-2}^n \subset \Delta_a^b$, где Δ_l^m — вспомогательная сетка, а Δ_a^b — глобальная равномерная сетка с шагом $h: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ (рис. 2).

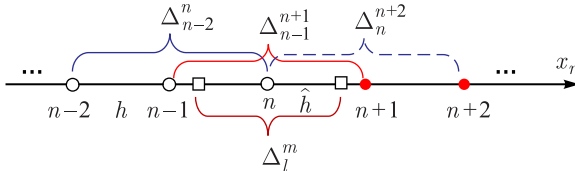


Рис. 2.

Задача МБЭ-прогноза заключается в вычислении $\hat{f}_{n+1} \approx f(x_{n+1})$ с использованием h , f_* , f'_* в узлах сеток Δ_{n-2}^n и значений многочленов $A(x_l)$ и $A(x_m)$ в узлах *вспомогательных* сеток $\Delta_l^m \subset \Delta_{n-1}^{n+1}$, $n = 4, 5, \dots$

Определение 2. МБЭ-многочлен

$$A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h) = \sum_{i=0 \dots 5} \mathbf{c}_i^T \mathbf{y}_{n-2}^n h^{-i} (x - x_{n-1})^i \quad (7)$$

называется *аппроксимирующим* на сетке Δ_{n-2}^n , где $\mathbf{y}_{n-2}^n = [f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, f'_{n-2}, f'_{n-1}, f'_n]^T$.

Определение 3. МБЭ-многочлен

$$F(x, \mathbf{f}_l^m, \hat{h}) = \sum_{i=0 \dots 5} \mathbf{c}_i^T \mathbf{f}_l^m \hat{h}^{-i} (x - x_n)^i, \quad 0 < \hat{h} < h, \quad (8)$$

называется *прогнозирующим* на вспомогательной сетке Δ_l^m , где 1-я и 3-я компоненты вектора $\mathbf{f}_l^m = [A_l, f_n, A_m, f'_l, f'_n, f'_m]^T$ равны значениям многочлена $A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h)$ в узлах x_l и x_m (индексы в обозначениях \mathbf{y}_{n-2}^n и \mathbf{f}_l^m указывают на первые и последние узлы в сетках Δ_{n-2}^n и Δ_l^m).

Схема МБЭ-прогноза использует информацию в *пяти* узлах — трех узлах сетки Δ_{n-2}^n и двух узлах сетки $\Delta_l^m \subset \Delta_{n-1}^{n+1}$. Чтобы получить оценку $\hat{f}_{n+1} = F(x_{n+1}, \mathbf{f}_l^m, \hat{h})$, нужно *трижды* вычислять f'_* в узлах x_l , x_m и x_{n+1} .

Точность прогноза многочленами (7) и (8) зависит от *сложности* f , f' и числа $K = \hat{h}/h$, $0 < K < 1$. Степень влияния числа K на поведение многочленов $F_i(x, \mathbf{f}_l^m, \hat{h}_i)$ зависит от длины шага h . Графики $F(x, \mathbf{f}_l^m, K_i h)$ показаны на примере функции Рунге при разных значениях K_i (рис. 3). Гра-

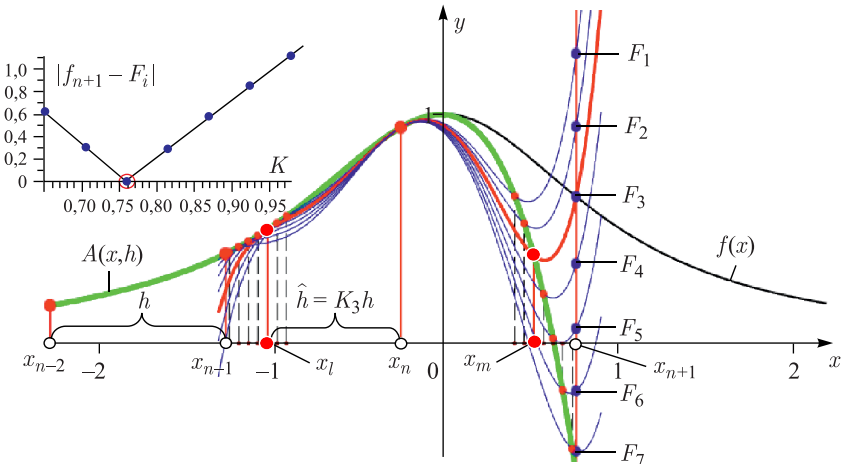


Рис. 3.

Таблица 1.

Параметр	$h = 1$				$h = 0,1$		$h = 0,001$	
	K_3	0,75	0,759	0,7594	0,759339	0,75	0,759398	0,75
e_3	0,051	$2 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$2,98 \cdot 10^{-6}$	$9,7 \cdot 10^{-11}$	$7,99 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$

фик $A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h)$ показан на сетке Δ_{n-2}^n с *большим* шагом $h = 1$, а графики $F_i(x, \mathbf{f}_l^m, K_i h)$ — на сетках $x_l^{(i)} < x_n < x_m^{(i)}$, $i = \overline{1, 7}$. На кривой $A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h)$ выделены опорные точки многочленов $F_i(x, \mathbf{f}_l^m, K_i h)$ в узлах $x_l^{(i)}$ и $x_m^{(i)}$. Точки пересечения $F_i(x, \mathbf{f}_l^m, K_i h)$ с прямой $x = x_{n+1}$ помечены как F_i . Точность попадания F_i в точку f_{n+1} на кривой f определяется ошибками $e_i = |f_{n+1} - F_i|$. При $K_3 = 0,75$ и $h = 1$ наименьшее расстояние $e_3 = 0,051$ (табл. 1).

В табл. 1 минимальная ошибка прогноза равна $2,983 \cdot 10^{-6}$ при $h = 1$ и $K_3 = 0,759339$. При шаге $h = 0,001$ и числе $K = 0,75$ ошибка $e_3 = 2 \cdot 10^{-15}$, а при $K = 0,759398$ $e_3 = 1 \cdot 10^{-15}$, т.е. при малом шаге порядок точности для обоих значений числа K одинаков и равен $O(h^5)$.

На рис. 4, *a* и *б* показаны графики многочленов $F_i(x, K_i h)$, $K_i = K_0 + (i - 1)\delta K$. Минимальные ошибки прогноза $e_f = \min\{|f_{n+1} - F_i|\}_{i=1}^{25}$ и $e_g =$

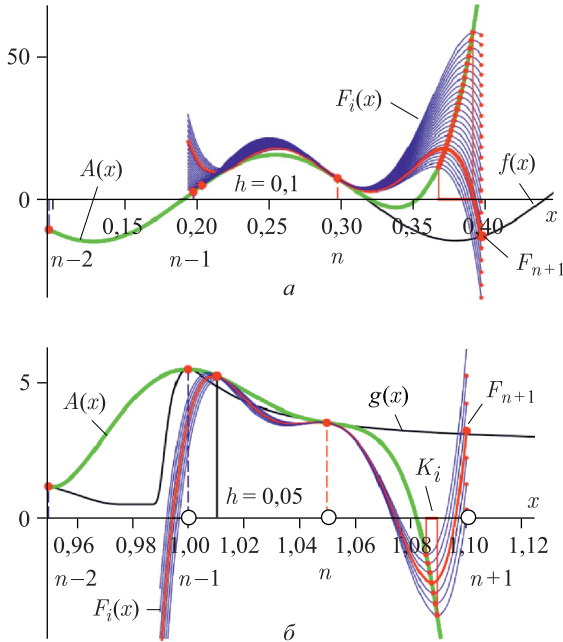


Рис. 4.

Таблица 2. ($K = 0,75$)

h	e_f	h	e_g
0,1	0,12177	0,05	0,02447
0,05	0,000254	0,01	0,0004905
0,001	$1,1 \cdot 10^{-13}$	0,005	$2,29627 \cdot 10^{-15}$

$\min_{F_i} \{|g_{n+1} - F_i|\}_{i=1}^7$ приведены в табл. 2. Ошибки получены на примере двух функций: $f(x) = x + \sin 25x + 15 \cos 25x$ и $g(x) = 5 \exp[-(x-1)^2/2/(0,0125 + 0,75(x-1))^2] + 0,5$ при $h = 0,1$, $K_0 = 0,7$, $\delta K = 0,01$ для f и при $h = 0,05$, $K_0 = 0,55$, $\delta K = 0,1$ для g .

Из табл. 2 видно, что при одном и том же значении $K = 0,75$ минимальная ошибка зависит от длины шага h и от сложности самих функций. При значительном уменьшении шага точность прогноза возрастает. Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть на сетке Δ_{n-2}^n с шагом h МБЭ-многочлен пятой степени $A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h)$ аппроксимирует функцию $f(x) \in C$. Тогда на сетке Δ_{n-1}^{n+1} найдутся точки $x_l = x_n - Kh$ и $x_m = x_n + Kh$, $0 < K < 1$, такие, что $F(x_{n+1}, \mathbf{f}_l^m, Kh) = \hat{f}_{n+1} \approx f_{n+1}$, где компоненты вектора $\mathbf{f}_l^m = [A_l, f_n, A_m, f'_l, f'_n, f'_m]^T$ вычисляются в узлах вспомогательной равномерной сетки $\Delta_l^m \subset \Delta_{n-1}^{n+1}$ с шагом $\hat{h} = Kh$. ■

С учетом (4)–(8) при заданном K схема МБЭ-прогноза на сетках Δ_{n-2}^n , Δ_l^m и Δ_{n-1}^{n+1} для $n \geq 3$ состоит из двух этапов — аппроксимации (А) и прогноза (F):

$$\begin{aligned} \text{(A)} \mathbf{y}_{n-2}^n &= [\hat{f}_{n-2}, \hat{f}_{n-1}, \hat{f}_n, f'_{n-2}, f'_{n-1}, f'_n]^T \rightarrow A_l = A(x_l, \mathbf{y}_{n-2}^n, h), \\ &A_m = A(x_m, \mathbf{y}_{n-2}^n, h), \quad (9) \\ \text{(F)} \mathbf{f}_l^m &= [A_l, \hat{f}_n, A_m, f'_l, f'_n, f'_m]^T \rightarrow \hat{f}_{n+1} = F(x_{n+1}, \mathbf{f}_l^m, \hat{h}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Графические представления прогноза (9) для различных кривых показаны на рис. 5. На старте при заданном K вычисляются начальные значения компонент $\mathbf{y}_1^3 = [f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2, f'_3]^T$ в узлах сетки Δ_1^3 : $x_1 < x_2 < x_3$. Затем в узлах $x_2 - \hat{h}$ и $x_2 + \hat{h}$ считаем A_l, A_m, f'_l, f'_m и формируем вектор $\mathbf{f}_l^m = [A_l, f_2, A_m, f'_l, f'_2, f'_m]^T$ для вычисления оценки \hat{f}_4 — компоненты в Δ_2^4 на новой сетке Δ_2^4 : $x_2 < x_3 < x_4$ и процесс продолжаем на сетках Δ_{n-2}^n для $n = 5, 6, \dots$

Замечание 1. Оценки \hat{f}_* , полученные на предыдущих шагах, используются как компоненты вектора $\mathbf{y}_{n-1}^{n+1} = [\hat{f}_{n-1}, \hat{f}_n, \hat{f}_{n+1}, f'_{n-1}, f'_n, f'_{n+1}]^T$ для многочлена $A(x, \mathbf{y}_{n-1}^{n+1}, h)$, экстраполирующего $f(x)$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$.

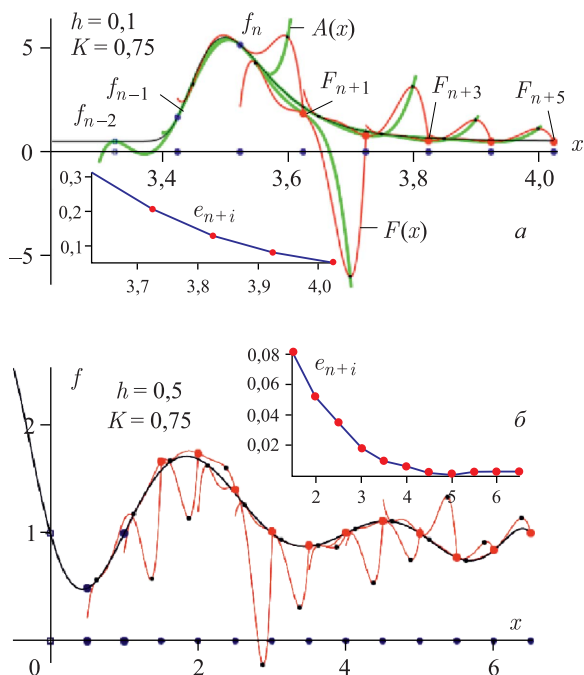


Рис. 5.

Кривые $A(x), F(x)$, точки F_{n+i} , $i = \overline{1, 5}$, и график ошибок $e_{n+i} = |f(x_{n+i}) - F_{n+i}|$ для гауссоподобной функции $f(x) = 5 \exp(-(x - 3,5)^2/2 / (0,059 + 0,2(x - 3,5)^2) + 0,5$ показаны на рис. 5, а. На рис. 5, б показаны графики $F(x)$ на примере многочлена восьмой степени. Несмотря на заметные отклонения F_{n+i} от графика f , начиная с четвертой точки, точность оценок \hat{f}_{n+1} возрастает (см. графики e_{n+i}).

На примере функции $y(x) = e^{-x^2} \sin(x)/x$ при $h=0,1$ (рис. 6, а) видно, что при уменьшении шага на порядок ($h = 0,01$) ошибка $e_n = y(x_m) - \hat{y}_n$ уменьшилась на пять порядков. Показаны графики коэффициентов d_{in} , $i = \overline{1, 5}$, в форме $\log(|d_{in}|)$ для $A(x, \mathbf{y}_{n-2}^n, h)$ и $F(x_{n+1}, \mathbf{f}_l^m, Kh)$ (рис. 6, б).

На рис. 7, а показаны результаты МБЭ-прогноза и ошибки для функции $y(x) = 5 \exp[-(x - 3,5)^2/2 / (0,025 + 7(x - 3,5)^2) + 0,5]$ при $K = 0,761$ и $h = 0,000125$. Добавление к предсказанным значениям нормально распределенных случайных ошибок ($\sigma = 0,12$) заметно снижает порядок точности при сохранении устойчивости вычислений (рис. 7, б).

Прогноз точек на кривой $f(x) = \text{abs}(\text{tg } x)$, $x \in [-1,5, 1,5]$, имеющей разрыв производной в точке $x = 0$, показан на рис. 8.

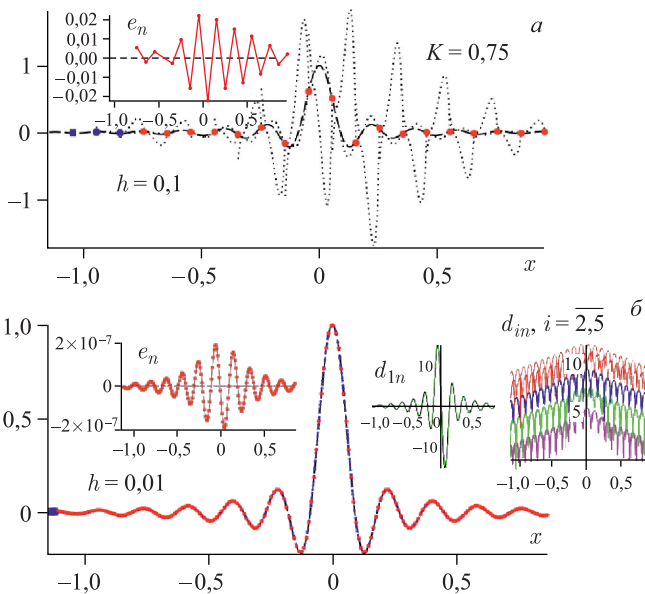


Рис. 6.

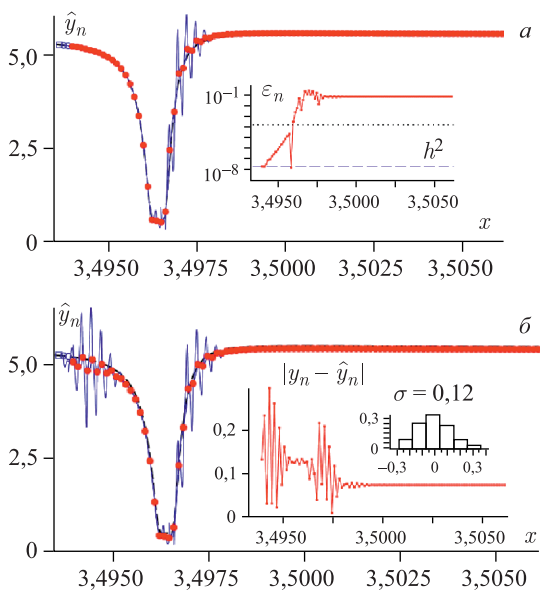


Рис. 7.

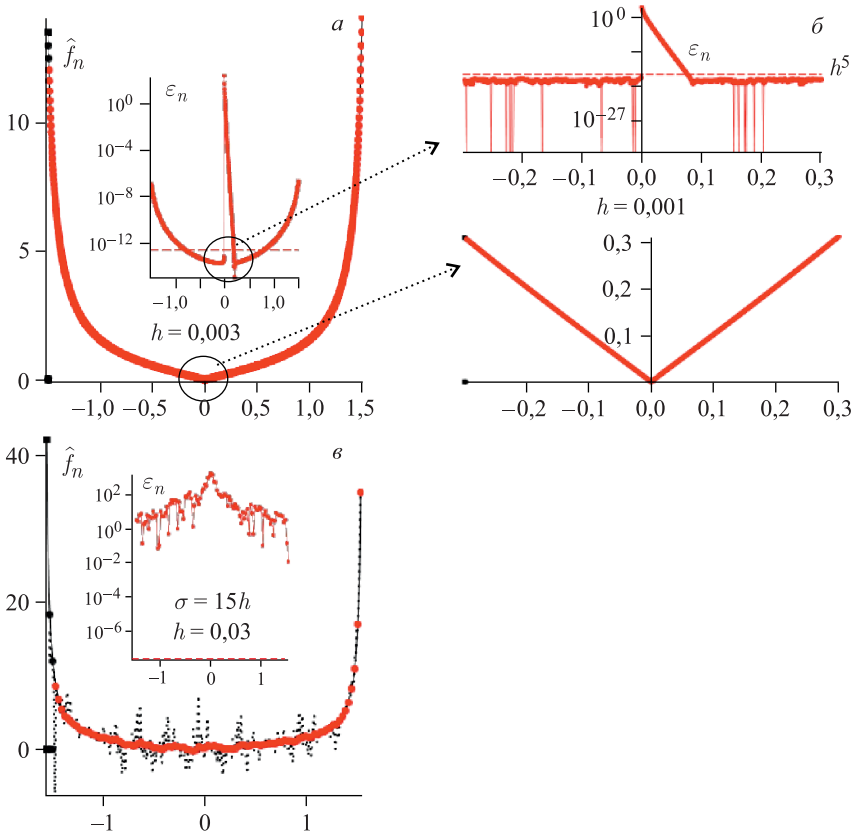


Рис. 8.

На рис. 8, *a* и *б* приведены графики \hat{f}_n при $h = 0,003, 0,001$ и графики ошибок ε_n , на которых виден большой скачок в точке $x = 0$, быстро спадающий до уровня ниже h^5 . На рис. 8, *в* — результат, полученный при $h = 0,03$ с добавлением ошибок к \hat{f}_n .

3. МБЭ-ПРОГНОЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Известно, что многозначные методы решения ОДУ используют значения многочлена заданной степени в точке x_{n+1} для вычисления \hat{y}_{n+1} по формуле Тейлора соответствующего порядка [4]. Использование только *первой* производной в МБЭ-прогнозе при вычислении коэффициентов модели *шестого* порядка представляет особый интерес для численного решения задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (10)$$

Результаты численного решения уравнения (10) при сложной правой части существенно зависят от эффективности методов экстраполяции.

Замечание 2. МБЭ-прогноз использует три значения $y(x)$ в узлах начальной трехточечной сетки — $y_1 = y(x_1 - h)$, $y_2 = y(x_1)$ и $y_3 = y(x_1 + h)$, из которых y_2 и y_3 можно вычислить, например, с помощью метода Рунге–Кутты.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = -\lambda(y - \sin x) + \cos x, \quad y_0 = y(0) = 1, \quad (11)$$

с точным решением $y(x) = \exp(-\lambda x) + \sin x$. При $\lambda = 1000$ эта задача на отрезке $0 \leq x \leq 1$ является жесткой [4, с. 334].

На рис. 9 показаны результаты МБЭ-решения задачи (11) при различных значениях параметров λ , h (рис. 9, а и б). Решение задачи на отрезке $0 \leq x \leq 1$ при $\lambda = 1000$ и $K = 0,7536$ получено с ошибкой от $O(h^3)$ до $O(h^8)$ (см. рис. 9, а).

На рис. 9, б показано решение нежесткой задачи (11) для $\lambda = 10$ и шага $h = 0,02$ на отрезке $0 \leq x \leq 5$. График ошибок показывает, что порядок точности находится в пределах от $O(h^4)$ до $O(h^6)$. При добавлении случайных

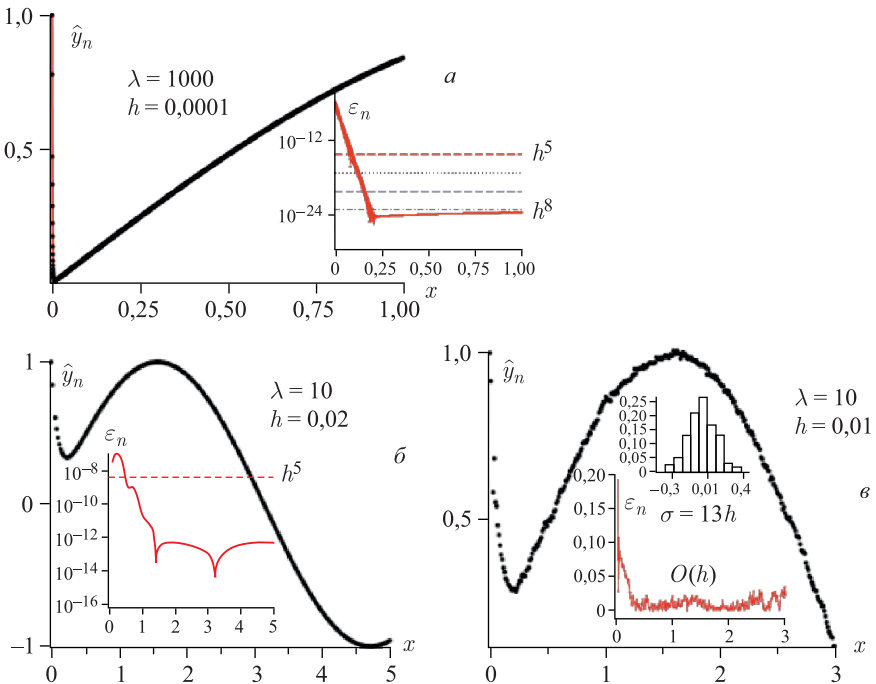


Рис. 9.

Таблица 3.

x_n	Ошибка	x_n	Ошибка	x_n	Ошибка	x_n	Ошибка
0,1	$1,27 \cdot 10^{-9}$	0,6	$3,62 \cdot 10^{-6}$	1,1	$-2,91 \cdot 10^{-6}$	1,6	$2,62 \cdot 10^{-6}$
0,2	$-2,62 \cdot 10^{-9}$	0,7	$5,20 \cdot 10^{-6}$	1,2	$-2,06 \cdot 10^{-6}$	1,7	$1,85 \cdot 10^{-6}$
0,3	$-8,60 \cdot 10^{-7}$	0,8	$4,56 \cdot 10^{-6}$	1,3	$1,80 \cdot 10^{-7}$	1,8	$1,23 \cdot 10^{-6}$
0,4	$-4,66 \cdot 10^{-7}$	0,9	$1,80 \cdot 10^{-6}$	1,4	$2,18 \cdot 10^{-6}$	1,9	$9,59 \cdot 10^{-7}$
0,5	$-1,40 \cdot 10^{-6}$	0,10	$-1,37 \cdot 10^{-6}$	1,5	$2,95 \cdot 10^{-6}$	2,0	$9,34 \cdot 10^{-7}$

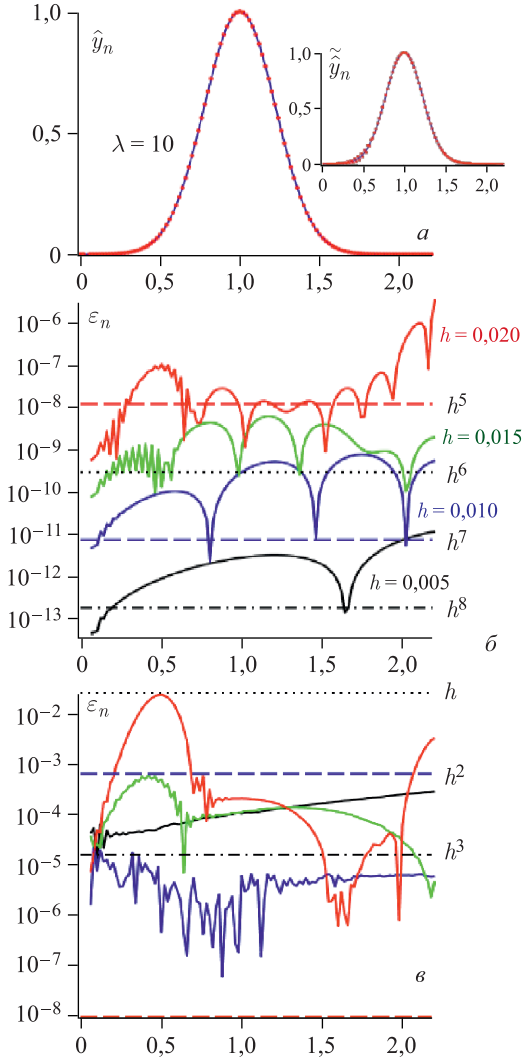


Рис. 10.

нормально распределенных ошибок к \hat{y}_n ($h = 0,01$ и $\lambda = 10$) порядок точности снизился до $O(h)$ (см. рис. 9, в).

Пример 2. В табл. 3 приведены результаты МБЭ-решения задачи Коши $y' = -2\lambda(x - 1)y$ на отрезке $[0, 2]$ при $\lambda = 5$, $h = 0,1$, $K = 0,75$, взятой из [4, стр. 336]. Данные в табл. 3 получены при начальных значениях $y_1 = y(x_1 - 0,1)$, $y_2 = y(x_1)$ и $y_3 = y(x_1 + 0,1)$. Точное решение равно $y = \exp(-5(x - 1)^2)$.

На рис. 10 и 11 показаны графики \hat{y}_n и $\varepsilon_n = \log(|y(x_n) - \hat{y}_n|)$ для $\lambda = 10$. При изменении шага от $h = 0,005$ до $h = 0,020$ порядок точности прогноза составил от $O(h^8)$ до $O(h^5)$ (см. рис. 10, б). При добавлении нормально распределенных случайных ошибок $e_n \approx N(0, h^2)$ к данным прогноза $\tilde{y}_n = \hat{y}_n + e_n$ порядок точности составил $O(h^3)$ – $O(h)$ (см. рис. 10, в).

При больших значениях λ эта задача становится жесткой в узком интервале с центром в точке $x = 1$ (см. рис. 11). При $\lambda = 100$ и шаге $h = 0,002$ порядок точности равен $O(h^3)$, а при $h = 0,0002$ порядок точности составляет $O(h^5)$ – $O(h^4)$ (см. рис. 11, а справа). При $\lambda = 100000$ и шаге $h = 0,00125$ вне более узкого интервала порядок точности достигает $O(h^6)$. Однако при таком уровне жесткости внутри интервала порядок точности находится между $O(h^2)$ и $O(h^5)$ (см. рис. 11, б).

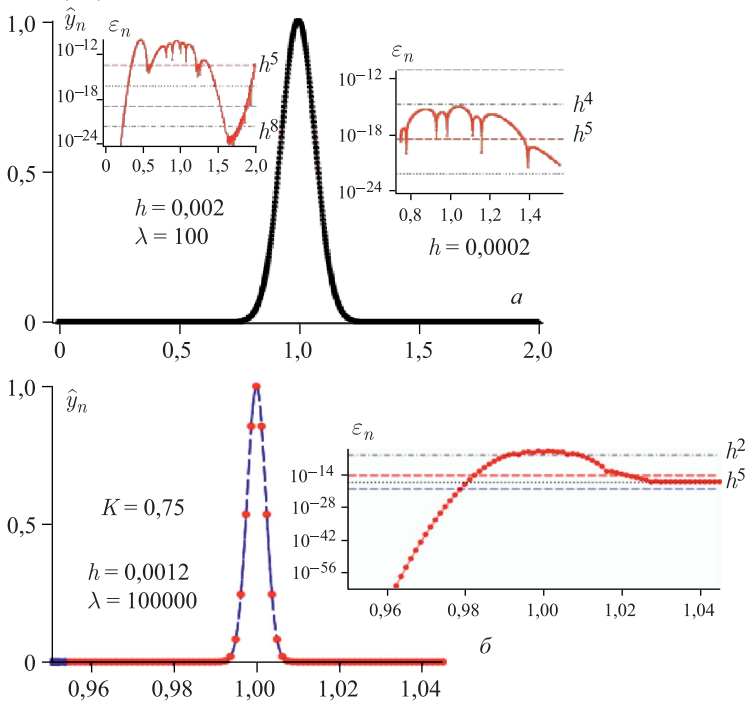


Рис. 11.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ МБЭ-ПРОГНОЗА

Рассмотрим *устойчивость* метода прогноза относительно h , ε_n и K на примерах. На рис. 12 представлены результаты численного решения уравнения $y' = -50xy^2$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_1 + h)$, $y_3 = y(x_1 + 2h)$, на глобальной сетке $x_n = x_1 + (n - 1)h$, $n = \overline{1, N}$, по схеме МБЭ-прогноза. Точным решением этого уравнения является функция Рунге $y(x) = 1/(1 + 25x^2)$.

Графики ошибок $\varepsilon_{n,m} = \log(|y_n - \hat{y}_{n,m}|)$ получены при $K = 0,75$ для пяти значений шага $h_m = 0,005, 0,0125, 0,02, 0,0275$ и $0,035$.

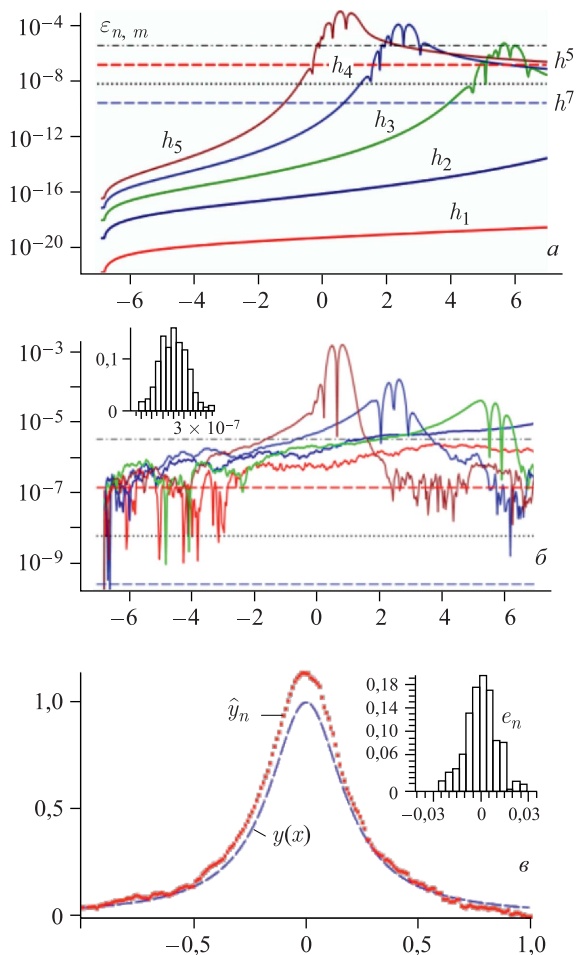


Рис. 12.

При увеличении шага максимальный порядок точности изменяется от $O(h^{13})$ до $O(h^2)$ (см. рис. 12, *а*). На рис. 12, *б* показаны те же графики, полученные при искажении $\hat{y}_{n,m}$ случайными нормально распределенными ошибками $\tilde{y}_{n,m} = \hat{y}_{n,m} + e_n$, где $e_n \sim N(0, h^3)$. В результате точность снизилась на несколько порядков. Результаты расчета \hat{y}_n при шаге $h = 0,01$ и значительных искажениях \hat{y}_n ошибками $e_n \sim N(0, h)$ показаны на рис. 12, *в*.

Поведение ошибок прогноза $\varepsilon_{n,m} = \{|y_n - \hat{y}_n|\}_{m=1}^7$, где $y_n = 1/(1+x_n^2)$, в зависимости от выбора как числа K ($K_m = 0,48 + 0,1(m-1)$), так и шага h ($h_1 = 0,1$, $h_2 = 0,01$) показано на рис. 13. Результаты представлены графиками аппроксимирующих многочленов. Числа K_m указаны на графиках ошибок. Наименьшие ошибки, полученные при $K = 0,751$, показаны жирными линиями.

В целом ошибки прогноза при h_1 (см. рис. 13, *а*) на порядок хуже ошибок, полученных при h_2 (см. рис. 13, *б*).

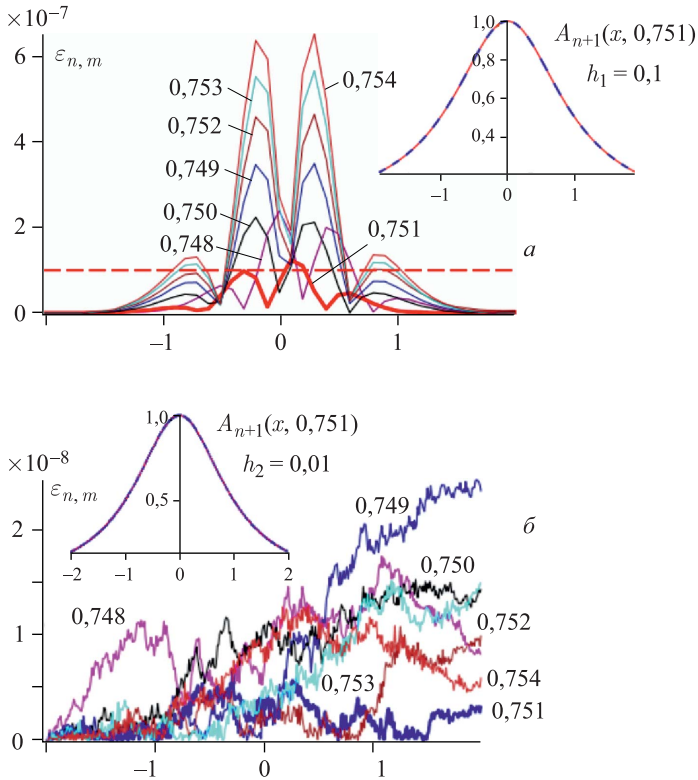


Рис. 13.

5. МБЭ-КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Обычно при расчетах начальной задачи единственным параметром, влияющим на точность решения, является шаг сетки h . Существуют различные методы с *контролем погрешности* на шаге [10]. Как правило, контроль точности выполняется путем сравнения результатов расчетов на вложенных сетках за счет уменьшения шага. В рассмотренных выше примерах порядок точности решения определялся путем сравнения \hat{y} с известным *точным* решением $y(x)$ при $K \approx 0,75$ и различных h . Однако на практике функция $y(x)$ неизвестна. В МБЭ-прогнозе, кроме h , имеется дополнительный параметр K , который может быть использован для оценки погрешности, начиная с четвертого узла глобальной сетки и в зависимости от класса искомой функции.

Точность \hat{y}_{n+1} можно оценить с помощью вычисления площадей $I_m = \int_{x_{n-1}}^{x_n} |A_n(x) - A_{n+1}(x, K_m)| dx$, ограниченных аппроксимирующим многочле-

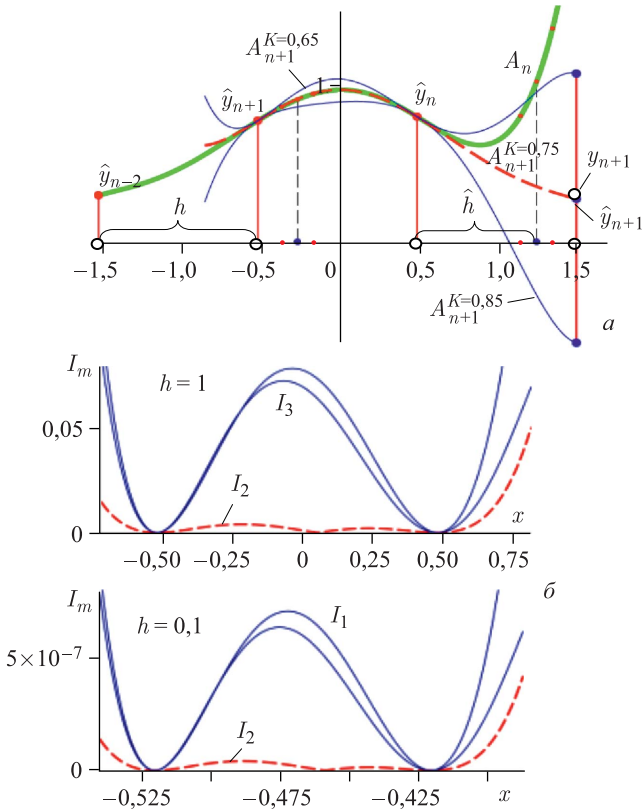


Рис. 14.

Таблица 4.

Параметр	$h = 1$			$h = 0,1$		
	0,65	0,75	0,85	0,65	0,75	0,85
K	0,65	0,75	0,85	0,65	0,75	0,85
I_m	0,042061	0,000808	0,038145	$3,7751 \cdot 10^{-8}$	$1,1626 \cdot 10^{-9}$	$3,3357 \cdot 10^{-8}$
$ y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} $	0,970328	0,035011	0,779617	$8,3809 \cdot 10^{-6}$	$1,0926 \cdot 10^{-7}$	$7,1335 \cdot 10^{-6}$

ном $A_n(x) = \sum_{i=0 \dots 5} \mathbf{c}_i^T \mathbf{y}_{n-2}^n h^{-i} (x - x_{n-1})^i$ и пробными многочленами $A_{n+1}(x, K_m) = \sum_{i=0 \dots 5} \mathbf{c}_i^T \mathbf{y}_{n-1}^{n+1} h^{-i} (x - x_n)^i$, $m = 1, 2, 3$, при $K_1 = K_2 - 0,1$, $K_2 = 0,75$, $K_3 = K_2 + 0,1$. Число K , соответствующее I_{\min} , берется для дальнейших расчетов. Графики $A_n(x)$, $A_{n+1}(x, K_m)$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$, (рис. 14, а) и I_m для $h = 1$ и $h = 0,1$ (рис. 14, б) получены на кривой $y(x) = 1/(1+x^2)$ — точном решении уравнения $y' = -2xy^2$.

Значения I_m и соответствующие им ошибки прогноза приведены в табл. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к решению задачи полиномиального прогноза и экстраполяции шестого порядка на основе метода базисных элементов. На n -м шаге глобальной *равномерной* сетки МБЭ-прогноз использует *пять узлов* двух перекрывающихся трехточечных сеток с шагами h и $\hat{h} = Kh$, $0 < K < 1$. Для вычисления прогноза используются значения функции и первой производной в узлах трехточечной сетки Δ_3^h , а также значения МБЭ-многочлена в двух узлах вложенной сетки Δ_l^m . Точность прогноза зависит от длины шага h , класса искомым функций и числа K . В работе число K определено экспериментально ($K \approx 0,75$). *Устойчивость* метода к ошибкам обеспечивается формулами вычисления коэффициентов МБЭ-многочленов пятой степени, зависящих от h , значений функции и ее первой производной в узлах сеток. Использование только *первой* производной на каждом шаге алгоритма и *трехкратное* обращение к правой части *понижают вычислительную сложность* численного интегрирования ОДУ.

МБЭ-прогноз имеет следующие свойства:

- пятый порядок точности при наличии только первой непрерывной производной в правой части;
- три обращения к правой части;
- устойчивость к вычислительным погрешностям;
- контроль точности по двум параметрам;
- расчет переменным шагом.

В дополнение к указанным свойствам результаты МБЭ-решения легко получить в аналитической форме с помощью среднеквадратичной кусочно-

полиномиальной аппроксимации МБЭ-многочленами выше пятой степени [7]. Недостаток метода заключается в необходимости вычисления с помощью других методов дополнительных значений $y(x)$ в двух узлах начальной трехточечной сетки. Дальнейшее развитие МБЭ-прогноза связано с использованием *неравномерной* вспомогательной сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы решения жестких систем // *Мат. моделирование*. 1995. Т. 7, № 5. С. 8–11.
4. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 575 с.
5. Дикусар Н. Д. Метод базисных элементов // *Мат. моделирование*. 2010. Т. 22, № 12. С. 115–136 (*Math. Models Comput. Simul.* 2011. V. 3, No. 4. P. 492–507).
6. Дикусар Н. Д. Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка с автоматическим обнаружением узлов // *Мат. моделирование*. 2014. Т. 26, № 3. С. 31–48 (*Math. Models Comput. Simul.* 2014. V. 6, No. 5. P. 509–522).
7. Дикусар Н. Д. Полиномиальная аппроксимация высоких порядков // *Мат. моделирование*. 2015. Т. 27, № 9. С. 89–109 (*Math. Models Comput. Simul.* 2016. V. 8, No. 2. P. 183–200).
8. Korepanova N. V., Dikuser N. D., Pepelyshev Yu. N., Dima M. Neutron Noise Analysis Using the Basic Element Method // *Ann. Nucl. Energy*. 2019. No. 131. P. 475–482.
9. Dikuser N. Shape Approximation Based on Higher-Degree Polynomials // *Proc. of MMCP2017. EPJ Web Conf. "Mathematical Modeling and Computational Physics"*. www.epj-conferences.org.
10. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 636 с.

Получено 9 января 2020 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 19.02.2020.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,47. Тираж 220 экз. Заказ № 59886.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/